Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2013

Blatt 5 Abgabetermin: Montag, 13. Mai 2013, 14:05h H1

Name: ______________________________

Aufgabe 21 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Es sei K ein Körper, $\lambda \in K$ und $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$M(m \times m; K) \ni J(\lambda; m) := \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(Wo nichts steht, sind Nullen.)

	richtig	falsch
Die Matrix $J(\lambda; m)$ hat als Spur λ.	☐	☐
Die Determinante von $J(\lambda; m)$ ist λ^m.	☐	☐
Das charakteristische Polynom von $J(\lambda; m)$ ist $(\lambda - X)^m$.	☐	☐
Das Minimalpolynom von $J(\lambda; m)$ ist $(\lambda - X)^m$.	☐	☐
Das Minimalpolynom von $J(\lambda; m)$ ist $(\lambda - X)^{m-1}$.	☐	☐
Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ ist m.	☐	☐

Aufgabe 22 a) Zu welcher Diagonalmatrix in $M(3 \times 3; \mathbb{Z})$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 0 \\ 3 & 18 & 0 \\ -6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

äquivalent?

b) Fassen Sie A nun als reelle Matrix auf und bestimmen Sie die Diagonalmatrix in $M(3 \times 3, \mathbb{R}[X])$, zu der $M_A(X)$ äquivalent ist.

c) Was sind die Invarianten- und Determinantenteiler von A?

4+4+2 Punkte

Aufgabe 23 Für Kaninchenfreunde: Die Fibonacci-Folge (a_n) ist rekursiv definiert durch

$$a_0 = a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n \geqslant 1).$$

(Wieso Kaninchen? Welche Modellierungsannahme steckt dahinter?)

Finden Sie eine Formel für die Fibonacci-Folge, die nicht rekursiv definiert ist, indem Sie eine passende lineare Abbildung suchen, die diagonalisierbar ist.

6 Punkte

Aufgabe 24 a) Es sei $p \in \mathbb{C}[X]$ und es sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p. Ist dann das komplex Konjugierte von z, $\bar{z}$ auch immer eine Nullstelle von p? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Was ändert sich, wenn Sie ein reelles Polynom $q \in \mathbb{R}[X]$ betrachten und z eine komplexe Nullstelle von q ist?

4+4 Punkte

Aufgabe 25 Sie haben im ersten Semester gezeigt, dass für einen Körper K und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in K$ die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \ldots & \lambda_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n+1}^n & \ldots & \lambda_{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

gleich $\prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)$ ist. (Das ist die *Vandermonde Determinante*).

Beweisen Sie damit, dass die Koeffizienten $a_n, \ldots, a_0$ eines Polynoms $a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ (mit $n \geqslant 1$) durch seine Werte auf $n+1$ verschiedenen Stellen immer eindeutig festgelegt sind. Insbesondere erhalten Sie damit wieder, dass ein Polynom vom Grad $n \geqslant 1$ höchstens n Nullstellen haben kann.

4 Punkte