Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2013

Blatt 4 Abgabetermin: Montag, 6. Mai 2013, 14:05h H1

Name: ______________________________

Aufgabe 16 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Im Folgenden sei K ein beliebiger Körper.

	richtig	falsch
Es sei $J = \{f \in K[X] \mid f(1_K) = 1_K\}$. Dann ist J ein Ideal in $K[X]$.	☐	☐
Für ein Polynom $f \in K[X]$ der Form $f = a_m X^m + \ldots + a_1 X + a_0$ sei die Ableitung definiert als $f' = m a_m X^{m-1} + \ldots + a_1$. Dann ist $J = \{f \in K[X] \mid f' = 0\}$ immer ein Ideal in $K[X]$.	☐	☐
Über $\mathbb{F}_2$ ist jede quadratische Matrix trigonalisierbar.	☐	☐
Für alle $A \in M(n \times n; K)$ mit $n \geqslant 1$ ist der Grad von $m_A(X)$ positiv.	☐	☐
Es sei $A^t = -A \in M(n \times n; \mathbb{R})$, dann sind die Nullstellen von $P_A(X)$ immer reell.	☐	☐
Es sei $A^t = A \in M(n \times n; \mathbb{R})$, dann sind die Nullstellen von $P_A(X)$ immer reell.	☐	☐

Aufgabe 17 a) Bestimmen Sie für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom.

b) Beweisen Sie den Satz von Cayley-Hamilton für 2×2-Matrizen über einem beliebigen Körper K elementar, d.h. weisen Sie durch Einsetzen nach, dass $P_A(A) = 0$ gilt.

4+4 Punkte

Aufgabe 18 Es sei K ein Körper. Für $f, g \in K[X]$ heißt ein Polynom $q \in K[X]$ der *größte gemeinsame Teiler von f und g*, falls q sowohl f als auch g teilt und falls ein $p \in K[X]$ ebenfalls f und g teilt, so teilt p das Polynom q. Abkürzend schreibt man $\mathrm{ggT}(f, g)$ für den größten gemeinsamen Teiler der Polynome f und g. (Ist der ggT eindeutig?)

a) Beweisen Sie, dass es Polynome $h_1, h_2 \in K[X]$ gibt, so dass $h_1 f + h_2 g = \mathrm{ggT}(f, g)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass jedes Ideal im Ring der ganzen Zahlen ein Hauptideal ist, d.h. für alle Ideale $I \subset \mathbb{Z}$ gibt es eine ganze Zahl n, so dass $I = n\mathbb{Z} = (n)$ ist. (Sie müssen nur den Beweis von 5.3 nachmachen. Anstelle des Grades von Polynomen können Sie den Absolutbetrag verwenden.)

c) Besitzt der Ring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ein Ideal I, das $\{0\} \neq I \neq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.

4+4+2 Punkte

Aufgabe 19 Trigonalisieren Sie die komplexe 3×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4 Punkte

Aufgabe 20 Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring ist, d.h. zeigen Sie, dass es ein Ideal $\{0\} \neq I$ in $\mathbb{Z}[X]$ gibt, welches nicht von der Form $h \cdot \mathbb{Z}[X]$ ist für ein $h \in \mathbb{Z}[X]$.

6 Punkte