Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2013

Blatt 3 Abgabetermin: Montag, 29. April 2013, 14:05h H1

Name: ______________________________

Aufgabe 11 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte.

Mit $\mathbb{F}_2$ bezeichnen wir den Körper mit 2 Elementen. Es sei K ein beliebiger Körper.

	richtig	falsch
Es gibt genau ein Polynom in $\mathbb{F}_2[X]$ vom Grad 0.	☐	☐
Genau ein Polynom f in $\mathbb{F}_2[X]$ vom Grad 2 ergibt die Nullabbildung $\varphi(f)\colon \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$, $\lambda \mapsto f(\lambda)$.	☐	☐
Es gibt genau vier Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$ vom Grad 2.	☐	☐
Für $A, B \in GL_n(K)$ mit $ABA = BAB$ gilt immer $\det(A) = \det(B)$.	☐	☐
Für alle $A, B \in M(n \times n; K)$ gilt $P_A(X)P_B(X) = P_{AB}(X)$.	☐	☐
Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; K)$ ist für alle $1 \neq a \in K$ diagonalisierbar.	☐	☐

Aufgabe 12 Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Zwei Endomorphismen f und g heißen *gleichzeitig diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass sowohl $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ als auch $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)$ Diagonalgestalt haben.

Zeigen Sie, dass für diagonalisierbare $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) f und g sind gleichzeitig diagonalisierbar.

b) Es gilt $f \circ g = g \circ f$.

(Benutzen Sie Satz 3.3!)

4+4 Punkte

Aufgabe 13 Wir betrachten Elemente der Form $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ in den Quaternionen. Solche heißen imaginäre oder reine Quaternionen. Einem solchen x ordnen wir $x' = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ zu. Im Folgenden bezeichne $\cdot$ die Multiplikation in den Quaternionen, $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ und $\times$ das Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt) im $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass $x \cdot y = -\langle x', y' \rangle + x' \times y'$ gilt und folgern Sie $x' \times y' = \frac{1}{2}(x \cdot y - y \cdot x)$.

b) Gegeben seien zwei allgemeine Quaternionen $x, y \in \mathbb{H}$. Wann gilt $x \cdot y = y \cdot x$?

c) Welche Quaternionen kommutieren mit allen anderen, d. h. für genau welche $x \in \mathbb{H}$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $y \in \mathbb{H}$?

4+2+4 Punkte

Aufgabe 14 Für eine festgewählte Matrix $A \in M(n \times n; K)$ über einem Körper K betrachten wir wieder den Einsetzungshomomorphismus

$$\varphi_A\colon K[X] \to M(n \times n; K).$$

Hierbei war φ_A so definiert, dass es ein $f = a_m X^m + \ldots + a_1 X + a_0$ abbildet auf $a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 E_n$.

Beweisen Sie, dass das Bild von φ ein kommutativer Ring ist. Es ist damit ein kommutativer Unterring von $M(n \times n; K)$.

4 Punkte

Aufgabe 15 Es sei K ein Körper und $f \in K[X]$ sei

$$f = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0.$$

Gibt es dann eine Matrix $A \in M(n \times n; K)$ mit der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom von A genau f ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

6 Punkte