Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2013

Blatt 2 Abgabetermin: Montag, 22. April 2013, 14:05h H1

Name: ____

Aufgabe 6 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte.

Es sei K ein beliebiger Körper, V ein K-Vektorraum mit $1 \leqslant \dim_K(V) = n < \infty$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

	richtig	falsch
Die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von f ist immer n.	☐	☐
Die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von f ist immer grösser als null.	☐	☐
Ist $n = 3$ und $K = \mathbb{R}$, so hat f mindestens einen Eigenwert.	☐	☐
Die Abbildung f hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.	☐	☐
Für $p = X^n - 1$ mit $n \geqslant 1$ und $g = X - 1$ ist $p = gq$ mit $q = \sum_{i=0}^{n-1} X^i$.	☐	☐
Für $p = X^n - 1$ mit $n \geqslant 1$ und $g = X - 1$ ist $p = gq$ mit $q = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i X^i$.	☐	☐

Aufgabe 7

a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $X^4 - 1 \in K[X]$ für $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_5$.

b) Erfüllt $f \in \mathrm{End}_K(V)$ die Gleichung $f \circ f = f$, welche Eigenwerte kann f dann nur haben? Geben Sie ein nicht-triviales Beispiel für eine solche Abbildung an.

4+4 Punkte

Aufgabe 8

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^4$ mit der Standardbasis (e_1, e_2, e_3, e_4). Wir definieren eine Multiplikation auf dem $\mathbb{R}^4$, indem wir auf der Basis festlegen, dass e_1 eine Eins ist und dass die Identitäten

$$e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = -1, e_2e_3 = -e_3e_2 = e_4, e_3e_4 = -e_4e_3 = e_2, e_4e_2 = -e_2e_4 = e_3$$

gelten. Damit wird der $\mathbb{R}^4$ zu einer $\mathbb{R}$-Algebra, den sogenannten Hamiltonschen Quaternionen.

Gebräuchlich sind die Abkürzungen $e_2 = i$, $e_3 = j$, $e_4 = k$ und man schreibt $\mathbb{H}$ für den $\mathbb{R}^4$ mit dieser Algebra-Struktur.

a) Berechnen Sie ein allgemeines Produkt

$$(\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k)(a + bi + cj + dk).$$

Ist $\mathbb{H}$ kommutativ?

b) Zeigen Sie, dass es auf $\mathbb{H}$ eine Anti-Involution gibt, d.h. eine bijektive Abbildung $J \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, welche die Gleichungen $J \circ J = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$, $J(v + w) = J(v) + J(w)$ und $J(vw) = J(w)J(v)$ für alle $v, w \in \mathbb{H}$ erfüllt. Ist dieses J $\mathbb{R}$-linear?

c) Es sei $w = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \neq 0$. Zeigen Sie, dass w ein Inverses hat und geben Sie eine explizite Formel dafür an. (Hinweis: Erinnern Sie sich daran, wie man das inverse Element zu $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bestimmt.)

2+4+4 Punkte

Aufgabe 9

Ist K ein Integritätsbereich und $f, q, g, r \in K[X], q \neq 0$, so dass $f = qg - r$ mit $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g)$. Geben Sie eine Formel für $\mathrm{grad}(q)$ an.

4 Punkte

Aufgabe 10

Es sei K ein Körper und $\mathcal{A} \subset M(2 \times 2; K)$ sei der von E_2 und der Matrix $\Psi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aufgespannte Untervektorraum.

a) Beweisen Sie, dass die gewöhnliche Matrizenmultiplikation $\mathcal{A}$ zu einer K-Algebra macht. Ist sie unitär und kommutativ?

b) Wir fassen K als Teilmenge von $\mathcal{A}$ auf, indem wir ein $x \in K$ abbilden auf xE_2. Beweisen Sie, dass für alle Matrizen $B \in M(n \times n; K)$ und für die Einheitsmatrix $E_n \in M(n \times n; \mathcal{A})$ gilt, dass

$$\det(E_n + \Psi \cdot B) = 1 + \Psi \cdot \mathrm{tr}(B).$$

Hierbei ist $\mathrm{tr}(B)$ die Spur von B: Hat B die Einträge b_{ij}, so ist $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$.

6 Punkte