Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2013

Blatt 12 Abgabetermin: Montag, 8. Juli 2013, 14:05h H1

Name: ____

Aufgabe 56 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. In den ersten vier Aufgaben sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum der Dimension $n \geqslant 1$ und f sei ein Endomorphismus von V.

	richtig	falsch
Es sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann ist $U^\perp$ immer f-invariant, falls U f-invariant ist.	☐	☐
Es sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann ist $U^\perp$ immer f-invariant, falls U f-invariant ist und f orthogonal ist (V euklidisch).	☐	☐
Es sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann ist $U^\perp$ immer f-invariant, falls U f-invariant ist und f selbstadjungiert ist.	☐	☐
Es sei f selbstadjungiert und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren mit $\|\|v_i\|\| = 1$. Dann ist $\mathcal{B}$ immer eine ON-Basis.	☐	☐
Es gibt ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$, so dass die Scherungsabbildung g mit $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ selbstadjungiert ist.	☐	☐
Es gibt keine hermitesche Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ für $n > 1$, die unitär ist.	☐	☐

Aufgabe 57 Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & -2 \end{pmatrix}$. Diagonalisieren Sie A bezüglich einer ON-Basis aus Eigenvektoren.

4 Punkte

Aufgabe 58 Es seien $A, B \in O(n)$ für ungerades $n \geqslant 1$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\det((A + B)(A - B)) = 0.$$

4 Punkte

Aufgabe 59 Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die quadratische Form, die für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gegeben ist durch

$$q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix der zugehörigen symmetrischen Bilinearform β bezüglich der Standardbasis.

b) Diagonalisieren Sie diese Matrix bezüglich einer ON-Basis aus Eigenvektoren.

c) Bestimmen Sie damit die Signatur von β.

4+4+4 Punkte

Aufgabe 60 Ein reeller Vektorraum V heißt *symplektisch*, falls er eine nicht-ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform besitzt. Solche Bilinearformen werden klassischerweise mit ω bezeichnet.

a) Falls die Dimension von V m ist, was können Sie über m sagen?

b) Zeigen Sie, dass jeder endlich-dimensionale symplektische $\mathbb{R}$-Vektorraum V eine Basis

$$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n)$$

besitzt, so dass $\omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0$ und $\omega(u_i, v_j) = \delta_{i,j}$ gilt.

4+4 Punkte