Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2013

Blatt 11 Abgabetermin: Montag, 1. Juli 2013, 14:05h H1

Name: ____

Aufgabe 51 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte.

	richtig	falsch
Die Matrix $-E_3$ ist ein Element von $SO(3)$.	☐	☐
Die Matrix $-E_2$ ist ein Element von $SO(2)$.	☐	☐
Die Matrix $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist ein Element von $O(2)$.	☐	☐
Es gibt auf dem $\mathbb{R}^3$ ein Skalarprodukt, so dass das Volumen des von den Vektoren $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ aufgespannten Spats 42 ist.	☐	☐
Es ist $O(n) \subset U(n)$ für alle $n \geqslant 1$.	☐	☐
Die Gruppe $O(1)$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.	☐	☐

Aufgabe 52 Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i-1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i+1}{2} \end{pmatrix}$$

unitär ist und finden Sie zu A eine ON-Basis aus Eigenvektoren und diagonalisieren Sie A damit. (Ist A auch ein Element aus $SU(2)$?)

4 Punkte

Aufgabe 53 Bringen Sie die Matrix

$$O(3) \ni B = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

auf Normalform.

6 Punkte

Aufgabe 54 Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ sei orthogonal. Zeigen Sie,

a) dass die Komplexifizierung von V, $V_{\mathbb{C}}$, ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum ist,

b) dass $f_{\mathbb{C}}$ eine unitäre Abbildung auf $V_{\mathbb{C}}$ ist,

c) dass $(\mathbb{R}^n)_{\mathbb{C}}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum isomorph ist zu $\mathbb{C}^n$ für $n \geqslant 1$ und dass allgemeiner für endlich-dimensionale euklidische V gilt: $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

4+4+4 Punkte

Aufgabe 55 Beweisen Sie, dass $SU(2)$ isomorph ist zu $\mathbb{S}^3 = \{w \in \mathbb{H} | ||w|| = 1\}$. Hierbei bezeichnet $\mathbb{H}$ die $\mathbb{R}$-Algebra der Quaternionen.

6 Punkte