Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2013

Blatt 10 Abgabetermin: Montag, 24. Juni 2013, 14:05h H1

Name: ________________________________

Aufgabe 46 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Für die letzten fünf multiple-choice Aufgaben sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum.

	richtig	falsch
Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und ist β eine symmetrische Bilinearform, so dass für eine Basis $(v_i)_{i\in I}$ $\beta(v_i, v_i) > 0$ ist. Dann ist β in jedem Fall positiv definit.	☐	☐
Es gilt immer, dass $\langle v, w\rangle \geqslant 0$ ist für alle $v, w \in V$.	☐	☐
Es seien $v, w \in V$ gegeben. Dann gilt immer $\|\|v + w\|\|^2 - \|\|v - w\|\|^2 = 2\langle v, w\rangle$.	☐	☐
Es gilt immer $\|\|v + w\|\|^2 - \|\|v - w\|\|^2 = 4\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$.	☐	☐
Für alle $v, w \in V$ gilt , dass $\|\|v + w\|\|$ genau dann gleich $\|\|v - w\|\|$ ist, wenn $\langle v, w\rangle = 0$ ist.	☐	☐
Für alle $v, w \in V$ gilt, dass $\langle v + w, v - w\rangle = \|\|v\|\|^2 + \|\|w\|\|^2$.	☐	☐

Aufgabe 47 Zur quadratischen Form auf dem $\mathbb{R}^3$ $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ für $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ betrachten wir den Doppelkegel

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 | q(x) = 0\}.$$

Stellen Sie (auch ohne formale Herleitung) eine vollständige Liste der möglichen Kegelschnitte auf; dies sind Schnitte von C mit affinen Ebenen. Zeichnen Sie diese.

4 Punkte

Aufgabe 48 Benutzen Sie das Gram-Schmidt Verfahren um zu zeigen, dass es für jedes $A \in M(m \times n; \mathbb{R})$ mit Rang n ein $B \in M(m \times n; \mathbb{R})$ und ein $T \in M(n \times n; \mathbb{R})$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

- $A = BT$,
- Die Spalten von B sind eine Familie orthonormaler Vektoren.
- Die Matrix T ist eine obere Dreiecksmatrix.

4 Punkte

Aufgabe 49

a) Orthonormalisieren Sie die Familie

$$\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

im $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

b) Es sei W der $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf $[0, 1]$ definierten, reellwertigen stetigen Funktionen und $U \subset W$ sei der Unterraum, der von den Vektoren $v_1(t) = 3t^2$, $v_2(t) = 2t^3$ und $v_3(t) = t - 1$ aufgespannt wird. Wir betrachten auf W das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Betrachten Sie $w_1(t) = ||v_1(t)||^{-1}v_1(t)$ und konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $(w_1(t), w_2(t), w_3(t))$ von U.

c) Es sei V ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset V$ sei ein endlich-dimensionaler Untervektorraum. Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $\pi_U : V \to U$ mit den Eigenschaften, dass π_U eingeschränkt auf U die Identität ist und dass der Kern von π_U das orthogonale Komplement von U ist.

4+4+4 Punkte

Aufgabe 50 Es sei $A \in M(m \times n; \mathbb{R})$ gegeben und es sei $b \in \mathbb{R}^m$. Falls das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung besitzt, ist man an Näherungslösungen interessiert, d.h. gesucht ist ein $y \in \mathbb{R}^n$, so dass der Fehler $||Ay - b||$ minimal ist. Hierbei ist die Norm diejenige, die zum Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^m$ gehört.

a) Es sei $W \subset \mathbb{R}^m$ ein beliebiger Untervektorraum und $v \in \mathbb{R}^m$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion von v auf W, $\tilde{v}$, der Vektor in W ist, der zu v minimalen Abstand hat, d.h. es gilt

$$||v - w|| > ||v - \tilde{v}||$$

für alle $w \in W$ mit $w \neq \tilde{v}$.

b) Betrachten Sie den Untervektorraum $U := \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$, also das Bild der Matrixmultiplikation mit A. Der Rang von A sei n. Zeigen Sie, dass es ein eindeutig bestimmtes $y \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass der Fehler $||Ay - b||$ minimal ist.

c) Diese Methode, eine Näherungslösung zu finden, nennt man *Methode der kleinsten Quadrate*. Warum?

4+4+0 Punkte