Übungsaufgaben zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 2 Abgabetermin: Mittwoch, 31. Oktober 2012

Aufgabe 6 Kreuzen Sie nur jeweils eine Antwort an, geben Sie keine Begründung an. Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, für jeden Fehler einen Minuspunkt; insgesamt aber schlimmstenfalls 0 Punkte. Im allgemeinen Teil seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ Abbildungen.

	richtig	falsch
Ist $g \circ f = \mathrm{id}_X$, so ist f immer injektiv.	☐	☐
Ist $g \circ f = \mathrm{id}_X$, so ist g immer injektiv.	☐	☐
Ist $g \circ f = \mathrm{id}_X$, so ist g immer surjektiv.	☐	☐
Die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\alpha(x) = 2x$, ist eine surjektive Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$.	☐	☐
Die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $\alpha(x) = 2x$, ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$.	☐	☐
Die Abbildung $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\alpha(x) = 2x$, ist eine injektive Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$.	☐	☐

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung

$$ax + by = c$$

für Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ und für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ entweder die leere Menge, ganz $\mathbb{R}^2$ oder eine Gerade ist. Im letzten Fall geben Sie die Parameterform der Geraden an. (Machen Sie die notwendige Fallunterscheidung in Abhängigkeit von a, b und c.!)

3 Punkte

Aufgabe 8

a) Es sei X eine endliche Menge und $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
1) f ist surjektiv.
2) f ist injektiv.
3) f ist bijektiv.

b) Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann injektiv ist, wenn für je zwei Teilmengen $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$ gilt

$$f(X_1) \cap f(X_2) = f(X_1 \cap X_2).$$

2 + 2 Punkte

Aufgabe 9 Schreiben Sie folgende Aussagen mithilfe von Quantoren und aussagenlogischen Verknüpfungen um, verneinen Sie sie und übersetzen Sie sie wieder zurück in vollständige deutsche Sätze.

a) Auf jedem Markt gibt es entweder mindestens 5 Äpfel zu kaufen oder gar keinen.
b) In jedem Flugzeug gibt es einen Sitz, den man nicht nach hinten neigen kann.
c) Es gibt einen Zug, in dem ein Fussballfan sitzt, der nicht betrunken ist.

jeweils 1 Punkt

Aufgabe 10 Betrachten Sie die Menge $\{1, \ldots, n\}$ für $n \geqslant 1$. Wie viele Elemente besitzt die Menge der bijektiven Selbstabbildungen dieser Menge? Beweisen Sie Ihre Antwort mit vollständiger Induktion.

3 Punkte