

Galoistheorie

Prof. Dr. B. Richter

Zur Durchführung: Geben Sie mir bitte zwei Wochen vor dem Termin Ihres Vortrags eine Ausarbeitung ab. Wenn Sie die Chance nutzen wollen, um TeX zu lernen – gut, aber meinetwegen kann die Ausarbeitung auch handschriftlich erfolgen. Die Ausarbeitung sollte den Stoff enthalten, den Sie vortragen möchten, aber darüberhinaus auch Details, die Sie vielleicht aus Zeitmangel nicht vorstellen können. Nach dem Vortrag haben Sie Zeit, die Ausarbeitung zu überarbeiten.

Arbeiten Sie bitte jeweils drei kurze Übungsaufgaben aus, die zu Ihrem Vortrag passen. Sie geben damit den anderen Teilnehmern und Teilnehmerinnen des Seminars die Chance, den Stoff besser mitzuverfolgen.

Ich werde die Vorträge und die Ausarbeitungen benoten. Sie wissen, dass das formal irrelevant ist.

Vorträge

- (1) **Körpererweiterungen:** Man konstruiert häufig Körpererweiterungen, um polynomiale Gleichungen lösen zu können. Zum Beispiel ist $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (mit $d \neq 1$ und d quadratfrei) eine Körpererweiterung des Körpers \mathbb{Q} . In \mathbb{Q} ist die Gleichung $X^2 = d$ nicht lösbar, in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ schon.
Sie sollten die elementaren Begriffe *Teilkörper*, *Primkörper*, *Grad einer Körpererweiterung* mit ihren Eigenschaften und anhand von Beispielen erläutern. Weiterhin sollten Sie uns erklären, was *einfache und algebraische Erweiterungen* sind und was Minimalpolynome mit Körpererweiterungen zu tun haben. [JS, V §1 und §2]
- (2) **Abbildungen zwischen Erweiterungen und algebraischer Abschluss:** Um Körpererweiterungen vergleichen zu können brauchen wir eine passende Art von Morphismen. Stellen Sie diese vor, leiten Sie deren Eigenschaften her und behandeln Sie zumindest die Beispiele $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
Zu einem gegebenen Körper K kann man einen *algebraischen Abschluss* von K konstruieren. Definieren Sie, was das ist, stellen Sie eine Konstruktion vor und diskutieren Sie, wie eindeutig ein solcher algebraischer Abschluss ist. [JS, V §3]
- (3) **Zerfällungskörper:** Wenn Sie eine bestimmte polynomiale Gleichung $f(X) = 0$ lösen wollen mit $f \in K[X]$, so kann man zu f eine Körpererweiterung von K angeben, in der f in Linearfaktoren zerfällt; dies ist der sogenannte *Zerfällungskörper von f* . Stellen Sie die Begriffe vor und zeigen Sie die Existenz eines solchen Körpers; definieren Sie *Normalität* von Körpererweiterungen und behandeln Sie Beispiele. [JS, V §4 bis 4.5]
- (4) **Normalität und Separabilität:** Beweisen Sie Eigenschaften normaler Körpererweiterungen [JS, 4.6, 4.7, 4.8] und führen Sie den Begriff der separablen Körpererweiterung ein. [JS, §5, bis 5.10]
- (5) **Satz vom primitiven Element, Galoiserweiterungen:** Beweisen Sie den Satz vom primitiven Element: Separable endliche Erweiterungen sind immer einfach! [JS, 5.11]. Definieren Sie, was eine Galoiserweiterung ist und behandeln Sie elementare Eigenschaften [JS, VI §1 bis 1.3]. Stellen Sie uns die Beispielklasse der endlichen Körper vor. [JS, V §6]
- (6) **Hauptsatz der Galoistheorie:** Stellen Sie uns den Hauptsatz der Galoistheorie vor und beweisen Sie ihn. Rechnen Sie ein Beispiel für die Galoiskorrespondenz vollständig durch. Erläutern Sie am Beispiel der endlichen Körper noch einmal alle Begriffe, die bisher vorgekommen sind. [JS, VI §1 ab 1.4]
- (7) **Übungsstunde:** Bereiten Sie eine Übungsstunde vor, in der Sie den bisher vorgekommenen Stoff anhand von Anwesenheitsaufgaben (Beispiele, kurze Aufgaben zur Begriffsklärung) aufarbeiten. Wiederholen Sie vor den entsprechenden Aufgaben kurz den für die Aufgaben relevanten Stoff. Suchen Sie sich selbständig Material zusammen aus [L], [M] und [JS].
- (8) **Kreisteilungspolynome und Einheitswurzeln:** In diesem Vortrag möchten wir die Adjunktion von Einheitswurzeln besprechen. Wann ergeben die vorkommenden Körpererweiterungen Galoiserweiterungen? Was ist das Kreisteilungspolynom und wann ist es irreduzibel? [JS, VI §2 bis 2.7]

- (9) **Galoisgruppen von Radikalerweiterungen:** Stellen Sie uns die Galoisgruppen vor, die bei der Adjunktion von n -ten Wurzeln auftreten können. Aufbauend auf dem vorigen Vortrag sollten Sie uns die Galoisgruppen der Zerfällungskörper von $X^n - 1$ beschreiben [JS, VI nach 2.7] und uns dann den Fall von Zerfällungskörpern von $X^n - a$ vorstellen [JS, VI §4 bis 4.4]. Behandeln Sie etwas aus [JS, VI 4.5, 4.6, 4.7], falls Zeit ist.
- (10) **Normalbasen:** Die Tatsache, dass eine Körpererweiterung $K \rightarrow L$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G ist, hat Auswirkungen auf den K -Vektorraum L : Sie wissen, dass gelten muss, dass die Dimension von L über K $|G|$ ist. Der Satz über Normalbasen gibt eine viel genauere Aussage: er sichert die Existenz einer Basis der Form $(g(a))_{g \in G}$ für ein geeignetes $a \in L$. [L, §12.3]
- (11) **Auflösbarkeit:** Was hat das Auflösen von Gleichungen mit auflösbaren Gruppen zu tun? Sie wissen, dass quadratische Gleichungen eine explizite Lösung haben. Mit etwas mehr Anstrengung bekommt man das auch für Gleichungen vom Grad drei und vier hin. Was passiert für Gleichungen höheren Grades? Galoistheorie ermöglicht einen systematischen Zugang zur Auflösbarkeit polynomialer Gleichungen. [JS, VI §5], [L, §15.1, Teile aus §15.2]
- (12) **Nicht-Auflösbarkeit:** Sie wissen, dass die alternierenden Gruppen A_n für $n \geq 5$ einfach sind. Daher sind die Gruppen A_n, Σ_n für $n \geq 5$ nicht auflösbar. Konstruieren Sie eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Σ_5 ! [L, §15.3]
- (13) **Hilberts Satz 90:** Für jede endliche Körpererweiterung $K \rightarrow L$ ist die Linksmultiplikation mit einem $a \in L$ ein K -linearer Endomorphismus von L . Dieser Abbildung kann man eine Determinante und eine Spur zuordnen. Stellen Sie uns Eigenschaften dieser *Norm* bzw *Spur* vor und geben Sie an, wie man sie explizit berechnen kann. Zeigen Sie, wie man aus der Spur eine schöne Bilinearform gewinnen kann und beweisen Sie Hilberts Satz 90, der Elemente mit Norm eins beschreibt.
- (14) **Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal:** Stellen Sie uns ein paar klassische Problem vor. Sie haben nur einen Zirkel und ein unbeschriftetes Lineal gegeben. Können Sie damit jeden Winkel dreiteilen? Können Sie aus einem Würfel mit Volumen V einen mit Volumen $2V$ konstruieren? Können Sie aus einem Kreis mit Flächeninhalt A ein Quadrat mit Flächeninhalt A konstruieren? Können Sie ein regelmässiges n -Eck konstruieren für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$? Was hat das mit Galoistheorie zu tun? [L, §1]

REFERENCES

- [JS] Jens-Carsten Jantzen, Joachim Schwermer, Algebra, Springer-Verlag, (2006), iv+396 pp.
- [L] Falko Lorenz, Einführung in die Algebra, Teil I, zweite Auflage, Bibliographisches Institut, Mannheim, (1992) xii+338 pp.
- [M] Patrick Morandi, Field and Galois theory, Graduate Texts in Mathematics **167**, Springer-Verlag, (1996) xvi+281 pp.