Übungsaufgaben zur Funktionentheorie (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2012

Blatt 9 Abgabetermin: **Montag, 18. Juni 2012**

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Zerlegung in Hauptteile der rationalen Funktion

$$\frac{z^6 - 2z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 9z - 4}{(z-1)^2(z+2)}.$$

Aufgabe 34 (2+2 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ auf jeder Halbebene $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) \geqslant 1 + \varepsilon\}$ gleichmäßig konvergiert.

Die Funktion $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ heißt *Riemannsche Zeta-Funktion* und wird mit $\zeta(z)$ bezeichnet.

b) Zeigen Sie die Produktformel für die ζ-Funktion: Es sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen. Dann gilt

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}}.$$

Etwas Unterhaltsames (?) dazu finden Sie auf `http://www.maa.org/devlin/zeta.pdf`

Aufgabe 35 (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Umlaufzahl invariant ist unter linearen Transformationen: Es sei $T(z) = az + b$ mit $0 \neq a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C}$. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ und jedes z_0, das nicht auf der Spur von γ liegt, dass

$$U(\gamma, z_0) = U(T \circ \gamma, T(z_0)).$$

Aufgabe 36 (4 Punkte)

Zeigen Sie die Eulerschen Formeln für die Werte $\zeta(2n)$ (vgl. Aufgabe 34):

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$$

wobei B_{2n} die $2n$-te Bernoulli-Zahl ist. Wir hatten in Aufgabe 24 die Bernoulli-Zahlen über

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

definiert. Es ist hilfreich, sich die Reihe

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

anzusehen und sich die Beziehung zu $\pi \cot(\pi z)$ zu überlegen.