Übungsaufgaben zur Funktionentheorie (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2012

Blatt 8 Abgabetermin: **Montag, 11. Juni 2012**

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Beweisen Sie den Satz über die Gebietstreue für meromorphe Abbildungen auf der Riemannschen Zahlenkugel: Es sei $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und f sei eine nicht-konstante meromorphe Abbildung auf U. Dann ist $f(U) \subset \bar{\mathbb{C}}$ ein Gebiet.

Aufgabe 30 (2+2 Punkte)

Es sei $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 sei eine isolierte Singularität von f.

a) Zeigen Sie, dass f in z_0 genau dann einen Pol der Ordnung $\leqslant k$ oder eine hebbare Singularität hat, wenn es eine punktierte Umgebung von z_0 und eine Konstante C gibt, so dass

$$|f(z)| \leqslant C|z - z_0|^{-k}$$

gilt für alle z aus der punktierten Umgebung.

b) Ist z_0 eine nicht-hebbare Singularität von f, welcher Art ist dann die Singularität z_0 für $\exp \circ f$?

Aufgabe 31 (2 + 1 Punkte)

a) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass die Menge aller meromorphen Funktionen auf U einen Körper bildet.

b) Wie kann man die Menge aller auf U holomorphen Abbildungen als Unterring dieses Körpers interpretieren?

Aufgabe 32 (3 Punkte)

Formulieren und beweisen Sie den Satz von L'Hospital für holomorphe Funktionen.