Übungsaufgaben zur Funktionentheorie (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2012

Blatt 7 Abgabetermin: **Montag, 4. Juni 2012**

Aufgabe 25 (3 Punkte)

Es sei z_0 eine Polstelle sowohl von f als auch von g. Beide Funktionen seien auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph, wobei U offen ist. Es seien jeweils k und ℓ die Vielfachheiten des Pols z_0 bezüglich f und g. Was können Sie über die Vielfachheit des Pols z_0 bezüglich $f \cdot g$ und $f + g$ sagen?

Aufgabe 26 (1+3 Punkte)

a) Es sei $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$. Welche Vielfachheit hat die Nullstelle $z = 0$?

b) Es sei $g(z) = \frac{\exp(\frac{1}{z-1})}{\exp(z)-1}$. Wo hat g Singularitäten und von welcher Art sind diese?

Aufgabe 27 (2 + 2 Punkte)

a) Geben Sie die Laurent-Entwicklung von $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$ um den Punkt $z_0 = 0$ in $B_1(0) \setminus \{0\}$ an.

b) Betrachten Sie die Funktion $g(z) = \sin \frac{z-1}{z+1}$. Wo ist die Funktion holomorph? Was ist die Nullstellenmenge? (Ist das ein Problem?)

Aufgabe 28 (3 Punkte)

Wir haben wichtige Beispiele reeller C^∞-Funktionen kennengelernt, die wir zu holomorphen Funktionen fortgesetzt haben. Geht das immer? Oder hatten wir Glück?

Es sei f eine C^∞-Funktion auf $\mathbb{R}$. Kann man f immer zu einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ fortsetzen, so dass U eine Umgebung von $\mathbb{R}$ ist?