Übungsaufgaben zur Funktionentheorie (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2012

Blatt 3 Abgabetermin: **Montag, 30. April 2012**

Aufgabe 9 (3 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionen $f_n(z) = \frac{z^n}{(n+1)^2 2^n}$ und untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ auf Konvergenz. Was ist der Konvergenzradius?

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Es sei $GL_2(\mathbb{R})_+$ die Menge aller $A \in GL_2(\mathbb{R})$ mit positiver Determinante. Zeigen Sie, dass diese Gruppe auf der oberen Halbebene $\mathcal{H}$ durch holomorphe Automorphismen operiert.

Aufgabe 11 (1 + 3 Punkte)

Setzen Sie für $z \in \mathbb{C}$

$$\binom{z}{0} := 1, \binom{z}{n} := \frac{z(z-1) \cdot \ldots \cdot (z-n+1)}{n!} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie die binomische Formel in Reihenform, d. h. zeigen Sie, dass für $w \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+w)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} w^n.$$

b) Untersuchen Sie die Binomialreihe zu $z \in \mathbb{C}$

$$b_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} w^n$$

auf Konvergenz (in Abhängigkeit von z).

Aufgabe 12 (2+2 Punkte)

a) Es sei (w_1, w_2, w_3) ein Tripel paarweise verschiedener Punkte in $\bar{\mathbb{C}}$ und (a, b, c) sei ein anderes solches Tripel. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Möbiustransformation gibt, die (w_1, w_2, w_3) auf (a, b, c) abbildet.

b) Ein $K \subset \mathbb{C}$ heißt *Möbiuskreis*, falls K entweder eine Kreislinie in $\mathbb{C}$ ist oder eine Gerade in $\mathbb{C}$ vereinigt mit dem Punkt ∞. Beweisen Sie, dass Möbiustransformationen Möbiuskreise wieder auf Möbiuskreise abbilden. Wie sieht der Schnitt eines Möbiuskreises mit $\mathbb{C}$ aus?