Übungsaufgaben zur Funktionentheorie (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2012

Blatt 2 Abgabetermin: **Montag, 23. April 2012**

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Untersuchen Sie die Abbildungen $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ und $z \mapsto |z|$ auf komplexe Differenzierbarkeit. Sind diese Abbildungen reell differenzierbar? (Benutzen Sie *nicht* Aufgabe 8!)

Aufgabe 6 (1+2 Punkte)

a) Es sei $z = x + iy$ und $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei die Abbildung $z \mapsto x^4y^2 + ix^2y^4$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ sind die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllt, d. h. wo ist f komplex differenzierbar?

b) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ sei komplex differenzierbar in $z_0 \in U$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g\colon \{z : \bar{z} \in U\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$$

in $\bar{z}_0$ komplex differenzierbar ist. Was ist $g'(\bar{z}_0)$?

Aufgabe 7 (3 + 1 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathring{\mathbb{D}}^2 \to \mathcal{H}$, $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ biholomorph ist. Bestimmen Sie außerdem den Real- und den Imaginärteil von f.

b) Was ist das Bild von $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1/2\}$ unter f?

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

a) Nimmt f nur reelle oder nur rein imaginäre Werte an, so ist f konstant.

b) Ist $|f|$ konstant, so auch f.