Übungsaufgaben zur Funktionentheorie (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2012

Blatt 10 Abgabetermin: **Montag, 25. Juni 2012**

Aufgabe 37 (3+2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jeder holomorphe Automorphismus von $\mathring{\mathbb{D}}^2$ und von $\mathcal{H}$, der zwei unterschiedliche Fixpunkte hat, schon die identische Abbildung ist.

b) Es sei $A \in SL_2(\mathbb{R})$, $A \neq \pm E_2$. Zeigen Sie, dass Φ_A genau dann einen Fixpunkt in $\mathcal{H}$ hat, wenn der Betrag der Spur von A kleiner ist als 2.

Aufgabe 38 (2 Punkte)

Es sei $p(z)$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geqslant 1$ und es seien $z_1, \ldots, z_n$ seine Nullstellen. Zeigen Sie,

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - z_i}.$$

Aufgabe 39 (2 + 1 Punkte)

Es seien $z, w \in \mathring{\mathbb{D}}^2$. Wir definieren

$$\Phi(w, z) := \frac{|z - w|}{|\bar{w}z - 1|}.$$

a) Zeigen Sie, dass für jede holomorphe Abbildung $f\colon \mathring{\mathbb{D}}^2 \to \mathring{\mathbb{D}}^2$ und alle $z, w \in \mathring{\mathbb{D}}^2$ gilt:

$$\Phi(f(w), f(z)) \leqslant \Phi(w, z).$$

b) Gilt $\Phi(f(w), f(z)) = \Phi(w, z)$ für $z \neq w$ aus $\mathring{\mathbb{D}}^2$, so ist f sogar in $\mathrm{Aut}(\mathring{\mathbb{D}}^2)$ und wir haben globale Gleichheit in a).

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Es sei $p(z)$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geqslant 1$ mit Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$. Zeigen Sie, dass jede Nullstelle von $p'(z)$ in der konvexen Hülle der z_i liegt.