Quasisymmetrische Funktionen und K-Theorie

Stephanie Ziegenhagen

Diplomarbeit am Department Mathematik,
Universität Hamburg

Betreuerin: Prof. Dr. Birgit Richter

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und dabei keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt habe.

Einleitung

Diese Arbeit auf dem Gebiet der Algebra und algebraischen Topologie beschäftigt sich mit zwei sehr unterschiedlichen Interpretationen der Hopfalgebra QSymm der quasisymmetrischen Funktionen. QSymm ist eine Verallgemeinerung der Hopfalgebra Symm der symmetrischen Funktionen und enthält diese als Unterhopfalgebra.

Symm ist ein Objekt, das in verschiedenen Gestalten in unterschiedlichen mathematischen Gebieten anzutreffen ist. Ein Beispiel hierfür sind Darstellungen der symmetrischen Gruppen Σ_n:
Um die Klasse der endlich erzeugten $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$-Moduln zu verstehen, betrachtet man die zugehörige Grothendieckgruppe $\mathcal{G}_0(\mathbb{Z}[\Sigma_n])$. Mithilfe von Induktion und Restriktion von Moduln lassen sich eine Multiplikation und eine Komultiplikation auf der direkten Summe $\mathcal{G}_0(\Sigma)$ der abelschen Gruppen $\mathcal{G}_0(\mathbb{Z}[\Sigma_n])$ konstruieren, die $\mathcal{G}_0(\Sigma)$ zu einer Hopfalgebra machen. Man kann zeigen, dass $\mathcal{G}_0(\Sigma)$ isomorph zu Symm ist.

In dieser Arbeit besprechen wir eine analoge darstellungstheoretische Interpretation von QSymm: Die q-Hecke-Algebren $H_n(q)$ zur Gruppe Σ_n sind über q parametrisierte Deformationen der Gruppenalgebra $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$. Wir werden zeigen, dass die direkte Summe $\mathcal{G}_0(H)$ der $\mathcal{G}_0(H_n(0))$ ebenfalls eine Hopfalgebra und als solche isomorph zu QSymm ist. Die Darstellungen der Deformationen $H_n(0)$ von $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ entsprechen also der Verallgemeinerung QSymm von Symm.
Diese Behauptung findet sich in [12], in der Literatur haben wir aber nur einen unvollständigen Beweis für einen Spezialfall gefunden. Unser Ziel ist es, diese Lücke zu schließen.
In Abschnitt 1 tragen wir die nötigen Begriffe zusammen, bestimmen die einfachen $H_n(0)$-Moduln und definieren dadurch einen Isomorphismus zwischen den abelschen Gruppen $\mathcal{G}_0(H)$ und QSymm. Danach definieren wir in Abschnitt 2 eine Multiplikation und eine Komultiplikation auf $\mathcal{G}_0(H)$ und zeigen, dass der Isomorphismus aus Abschnitt 1 ein Isomorphismus von Hopfalgebren ist.

Eine andere Verallgemeinerung von Symm ist die Hopfalgebra NSymm der nichtkommutativen symmetrischen Funktionen. QSymm ist graduiert dual zu NSymm, und wir zeigen in Abschnitt 3, dass sich diese Dualität darstellungstheoretisch interpretieren lässt: Die Hopfalgebra $\mathcal{G}_0(H)$ ist graduiert dual zur Hopfalgebra $\mathcal{K}_0(H)$, der direkten Summe der 0-ten algebraischen K-Gruppen $\mathcal{K}_0(H_n(0))$, und $\mathcal{K}_0(H)$ ist isomorph zu NSymm. Teile unseres Beweises sind angelehnt an den Artikel [4], in dem jedoch einige Probleme übergangen werden.

In den Abschnitte 4 und 5 beschäftigen wir uns mit der Verallgemeinerung einer anderen Sichtweise auf symmetrische Funktionen: Die Hopfalgebra Symm ist isomorph zur Homologie und Kohomologie des klassifizierenden Raums BU von U, und die Hopfalgebrastruktur von Symm ist induziert von Abbildungen auf Raumniveau.

Symm besitzt neben der Hopfalgebrastruktur noch zwei weitere Komultiplikationen, eine rein algebraisch definierte und eine von einer Abbildung $BU \times BU \to BU$ induzierte. Der Ring Symm ist darstellendes Objekt eines Funktors, des universellen Lambdarings Λ. Da Symm eine Hopfalgebra ist, ist Λ ein Funktor in die Kategorie der Gruppen, und obwohl die beiden zusätzlichen Komultiplikationen nicht übereinstimmen, induzieren beide dieselbe Multiplikation auf Λ und machen Λ schließlich zu einem ringwertigen Funktor.

Baker und Richter haben in [3] eine topologische Interpretation der Hopfalgebren NSymm und QSymm als Homologie und Kohomologie des Raums $\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty}$ bewiesen. Des weiteren haben sie auch auf $\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty}$ eine zweite Multiplikation $\diamond$ definiert. Dies besprechen wir in Abschnitt 4.
Das algebraisch definierte zweite Koprodukt auf Symm lässt sich zu einem zweiten Koprodukt auf QSymm verallgemeinern. Es ist unklar, in welchem Zusammenhang dieses und das durch $\diamond$ auf QSymm induzierte Koprodukt miteinander stehen. Wir versuchen in Abschnitt 5, die beiden Koprodukte mittels topologischer K-Theorie ineinander zu überführen.

An Kenntnissen setzen wir für die Abschitte 1 bis 3 grundlegendes Wissen über Ringe, Algebren und Moduln voraus, wie sie etwa in [15] zu finden sind. Um den Abschnitten 4 und 5 folgen zu können, sollten Grundkenntnisse in Topologie und algebraischer Topologie über CW-Komplexe und singuläre Homologie und Kohomologie vorhanden sein[9].

Mein allererster Dank gilt Prof. Birgit Richter, die mich stets in kürzester Zeit mit geduldigen Erklärungen, Ratschlägen, Ideen und Literaturhinweisen versorgt hat. Wann immer ich aus ihrem Büro kam, war ich motiviert, guter Dinge und hatte interessante neue Gedanken.
Des weiteren möchte ich mich bei meinen Eltern für die materielle und immaterielle Unterstützung bedanken, vor allem für ihre Erinnerungen daran, dass die meisten Dinge halb so schlimm sind. Ohne sie hätte mein Studium sicher anders ausgesehen.
Außerdem bedanke ich mich bei Hannah König, Marc Lange und Hermann Soré für viele aufmunternde und hilfreiche Gespräche und bei Marc Lange zusätzlich für etliche inspirierende Stunden am Telefon und im Café - möge die Macht der universellen Eigenschaft uns stets vor den Koordinaten bewahren!
Zu guter Letzt danke ich herzlich dem tapferen Nichtmathematiker, der diese Arbeit Korrektur gelesen hat, und dem Team des Insbeth für all den Kaffee.

Inhaltsverzeichnis

1 Die abelsche Gruppe $\mathcal{G}_0(H)$

1.1 $\mathcal{G}_0$ und $\mathcal{K}_0$ von Ringen

Möchte man einen Ring A besser verstehen, so ist eine Möglichkeit, die Moduln über A zu betrachten. Jedem Ring lassen sich die beiden Gruppen $\mathcal{G}_0(A)$ und $\mathcal{K}_0(A)$ zuordnen: abelsche Gruppen, erzeugt von Isomorphieklassen endlich erzeugter bzw. endlich erzeugter projektiver A-Moduln, modulo einer Relation, die ein sinnvolles Subtrahieren von Moduln ermöglicht.

Ist ein Resultat und sein Beweis der Literatur entnommen, so findet sich die Quellenangabe am Anfang des Beweises. Stammt nur das Resultat aus der Quelle, so ist diese in der Behauptung angegeben.

Definition 1.1. Es sei $\mathcal{C}$ eine Unterkategorie der A-Linksmoduln, die ein kleines Skelett S besitze. Es gebe also eine Unterkategorie S von $\mathcal{C}$, deren Objekte eine Menge bilden, die ein Objekt jeder Isomorphieklasse von $\mathcal{C}$ enthält und alle Morphismen zwischen Objekten aus S erbt, die es in $\mathcal{C}$ gibt. Es sei $F(S)$ die freie abelsche Gruppe mit Basis S und U die Untergruppe von S, die von

$$\{M - N - L \in F(S)| \text{ es gibt eine kurze exakte Sequenz } 0 \to L \to M \to N \to 0 \text{ in S}\}$$

erzeugt wird. Dann heißt $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}) := F(S)/U$ die Grothendieckgruppe von $\mathcal{C}$ (siehe [19, S. 84]).
Die Betrachtung eines Skelettes ist hier nötig, um die freie abelsche Gruppe bilden zu können. Wir werden im Folgenden die mengentheoretischen Feinheiten meist vernachlässigen und einen Modul mit dem ihm entsprechenden Element in S identifizieren, ohne dies explizit zu erwähnen. Alle hier betrachteten Kategorien besitzen ein Skelett.
Ist also $M \in \mathcal{C}$ ein Modul und $N \in \mathcal{C}$ ein Untermodul von M, so dass auch der Quotient von M und N in $\mathcal{C}$ liegt, so identifizieren wir M mit der Summe des Untermoduls und des Quotienten.

Beispiel 1.2. Es sei K ein Körper und $\mathcal{M}(K)$ die Kategorie der endlich erzeugten K-Moduln, also der endlichdimensionalen K-Vektorräume. Die Abbildung, die jedem K-Vektorraum seine Dimension zuordnet, induziert einen Isomorphismus $\mathcal{K}_0(\mathcal{M}(K)) \to \mathbb{Z}$ [19, S.88].
Betrachte andererseits die Kategorie $\mathcal{C}$ aller abzählbar erzeugten A-Moduln für einen beliebigen Ring A. Es ist $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}) = 0$: Für jeden A-Modul M gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to M \to \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M \to \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M \to 0,$$

also ist $-M = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M - \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M - M \in U$ [19, S.86].

Definition 1.3. (siehe [19, S.86])

(i) Es sei $\mathcal{M}(A)$ die Kategorie der endlich erzeugten A-Linksmoduln. Dann setzen wir $\mathcal{G}_0(A) := \mathcal{K}_0(\mathcal{M}(A))$.

(ii) Für die Kategorie der endlich erzeugten projektiven A-Linksmoduln $\mathcal{P}(A)$ definieren wir $\mathcal{K}_0(A) := \mathcal{K}_0(\mathcal{P}(A))$. Die Gruppe $\mathcal{K}_0(A)$ heißt die 0-te algebraische K-Gruppe von A.

Im Folgenden betrachten wir ausschließlich endlich erzeugte A-Linksmoduln und bezeichnen diese kurz als A-Moduln.
Hat ein Modul M einen Untermodul N, so liefern Inklusion und Projektion eine kurze exakte Sequenz $0 \to N \to M \to M/N \to 0$. Dies legt die Vermutung nahe, dass die elementaren Bausteine von $\mathcal{G}_0(A)$ die einfachen A-Moduln sind.

Erinnerung 1.4. (siehe [19, S.653ff])

(i) Eine Kompositionsreihe eines A-Moduls M ist eine absteigende Kette von A-Untermoduln

$$M = M_1 \supset ... \supset M_n \supset M_{n+1} = 0,$$

so dass M_i/M_{i+1} einfach ist, die Kette also keine Verfeinerung besitzt. Die Faktormoduln M_i/M_{i+1} heißen Faktoren der Kompositionsreihe. Zwei Kompositionsreihen heißen äquivalent, wenn es eine Bijektion zwischen den Faktoren der Reihen gibt, so dass einander zugeordnete Faktoren isomorph sind.

(ii) Nicht jeder Modul besitzt eine Kompositionsreihe. Hat M aber eine Kompositionsreihe, so sind alle anderen Kompositionsreihen nach dem Satz von Jordan-Hölder äquivalent.

(iii) Ist A ein linksartinscher Ring, so existiert eine Kompositionsreihe für jeden endlich erzeugten A-Modul M: Man verfeinert sukzessive die Reihe $M \supset 0$. Da M artinsch über A ist, erhält man nach endlich vielen Schritten eine Kompositionsreihe.

Satz 1.5. Es sei A linksartinsch und $\mathcal{D}$ die Kategorie, deren Objekte die einfachen A-Moduln und der Nullmodul sind. Dann ist

$$\mathcal{G}_0(A) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{D}) \cong \bigoplus_{X \in \mathcal{I}(\mathcal{D}) \setminus \{0\}} \mathbb{Z}.$$

Beweis. (siehe [19, S.89ff]) Wir schreiben $[M]$ für die durch einen A-Modul M in $\mathcal{G}_0(A)$ definierte Klasse. Ist M einfach, so sei das durch M in $\mathcal{K}_0(\mathcal{D})$ repräsentierte Element mit $[M]_\mathcal{D}$ bezeichnet.
Jeder A-Modul M besitzt eine Kompositionsreihe $0 = M_0 \subset ... \subset M_n = M$. Die Isomorphieklassen der Faktoren zweier Kompositionsreihen von M sind bis auf Umordnung gleich und nur von der Isomorphieklasse von M abhängig. Betrachte

$$j \colon \mathcal{G}_0(A) \to \mathcal{K}_0(\mathcal{D}), \quad [M] \mapsto \sum_{i=1}^{n} [X_i]_\mathcal{D},$$

wobei $X_1, ..., X_n$ die Faktoren einer Kompositionsreihe von M seien. Die Abbildung j ist wohldefiniert: Es sei $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{D}$ und

$$0 = M_0 \subset ... \subset M_k = f(L) \subset ... \subset M_n = M$$

eine Kompositionsreihe von M. Dann ist

$$0 = f^{-1}(M_0) =: L_0 \subset ... \subset f^{-1}(M_k) =: L_k = L$$

eine Kompositionsreihe von L und

$$0 = g(M_k) =: N_0 \subset ... \subset N_{n-k} := g(M_n) = N$$

eine Kompositionsreihe von N. Weiter ist $L_i/L_{i-1} \cong M_i/M_{i-1}$ für $i = 1, ..., k$ und

$$N_i/N_{i-1} \cong (M_{i+k}/L)/(M_{i+k-1}/L) \cong M_{i+k}/M_{i+k-1}$$

für $i = 1, .., n-k$. Es ist also

$$\begin{aligned} j([M]_{\mathcal{C}}) - j([L]_{\mathcal{C}}) - j([N]_{\mathcal{C}}) &= \sum_{i=1}^{n}[M_i/M_{i-1}]_{\mathcal{D}} - \sum_{i=1}^{k}[L_i/L_{i-1}]_{\mathcal{D}} - \sum_{i=1}^{n-k}[N_i/N_{i-1}]_{\mathcal{D}} \\ &= \sum_{i=k+1}^{n}[M_i/M_{i-1}]_{\mathcal{D}} - \sum_{i=1}^{n-k}[M_{i+k}/M_{i+k-1}]_{\mathcal{D}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass j und die Abbildung

$$i\colon \mathcal{K}_0(\mathcal{D}) \to \mathcal{G}_0(A), \quad [M]_{\mathcal{D}} \mapsto [M].$$

zueinander invers sind: Offensichtlich ist $j \circ i = \mathrm{id}_{\mathcal{K}_0(\mathcal{D})}$. Da für beliebiges $M \in \mathcal{M}(A)$ mit Kompositionsreihe $0 = M_0 \subset ... \subset M_n = M$ und für alle $i = 1, ..., n$ die Folge $0 \to M_{i-1} \to M_i \to M_i/M_{i-1} \to 0$ exakt ist, ist

$$\begin{aligned} i \circ j([M]_{\mathcal{C}}) &= \sum_{i=1}^{n}[M_i/M_{i-1}]_{\mathcal{C}} \\ &= \sum_{i=1}^{n}([M_i]_{\mathcal{C}} - [M_{i-1}]_{\mathcal{C}}) \\ &= [M_n]_{\mathcal{C}} - [M_0]_{\mathcal{C}} \\ &= [M]_{\mathcal{C}}, \end{aligned}$$

also ist $i \circ j = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ und damit $\mathcal{K}_0(\mathcal{C}) \cong \mathcal{G}_0(A)$.
Um zu zeigen, dass $\mathcal{K}_0(\mathcal{D}) \cong \bigoplus_{X \in \mathcal{I}(\mathcal{D}\setminus\{0\})} \mathbb{Z}$ ist, genügt es,

$$\{\mathrm{cl}(M) - \mathrm{cl}(N) - \mathrm{cl}(L) \in F(\mathcal{I}(\mathcal{D})) | \text{es gibt eine exakte Sequenz } 0 \to L \to M \to N \to 0\} = 0$$

nachzuweisen. Da aber Homomorphismen zwischen einfachen Moduln entweder bijektiv oder die Nullabbildung sind, ist für jede kurze exakte Sequenz $0 \to L \to M \to N \to 0$ in $\mathcal{D}$ entweder $L = 0$ und damit $M \cong N$ oder $L \cong M$ und dann $N = 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

1.2 0-Hecke-Algebren

Eine Coxetergruppe (W, S) besteht aus einer Gruppe W, die eine Präsentierung mit Erzeugendensystem S und Relationen

$$s^2 = 1, \quad (st)^{m(s,t)} = 1$$

besitzt, wobei auch $m(s,t) = \infty$, also keine Relation zwischen s und t möglich ist. Die Erzeuger sind demnach selbstinvers, und alle anderen Relationen entstehen aus Relationen zwischen zwei Erzeugern.
Beispiele für solche Gruppen sind die Weyl-Gruppen halbeinfacher Lie-Algebren. Uns wird im Folgenden die symmetrische Gruppe auf n Elementen, Σ_n, beschäftigen, die Weyl-Gruppe der einfachen Lie-Algebra vom Typ A_{n-1} [14].

Bemerkung 1.6. Bezeichne σ_i die Transposition $(i, i+1) \in \Sigma_n$. Die symmetrische Gruppe Σ_n hat eine Präsentierung mit $n-1$ Erzeugern $\sigma_1, ...\sigma_{n-1}$ und Relationen

$$\begin{cases} (1_\Sigma) & \sigma_i^2 = 1 \text{ für alle } i \in \{1, ..., n-1\}, \\ (2_\Sigma) & (\sigma_i\sigma_{i+1})^3 = 1, \text{ also } \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \text{ für alle } i \in \{1, ..., n-2\}, \\ (3_\Sigma) & (\sigma_i\sigma_j)^2 = 1, \text{ also } \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ für alle } i, j \in \{1, ..., n-1\} \text{ mit } |i-j| > 1. \end{cases}$$

Die Gruppe Σ_n ist also eine Coxetergruppe.

Es sei R ein kommutativer Ring. Jede Coxetergruppe W mit Erzeugendensystem S definiert eine von einer Unbestimmten q abhängige Familie von R-Algebren, die q-Hecke-Algebren vom Typ (W, S) [5]. Für $q = 1$ erhält man beispielsweise die Gruppenalgebra von W. Wir werden uns im Folgenden mit der 0-Hecke-Algebra zur Coxetergruppe Σ_n befassen.

Definition 1.7. Die 0-Hecke Algebra $H_n := H_n(0)$ vom Typ A_{n-1} über dem Körper K ist die assoziative unitäre K-Algebra erzeugt von $n-1$ Elementen $T_1, ..., T_{n-1}$ mit Relationen

$$\begin{cases} (1) & T_i^2 = -T_i \text{ für alle } i \in \{1, ..., n-1\}, \\ (2) & T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} \text{ für alle } i \in \{1, ..., n-2\}, \\ (3) & T_iT_j = T_jT_i \text{ für alle } i, j \in \{1, ..., n-1\} \text{ mit } |i-j| > 1, \end{cases}$$

siehe [24]. Wir definieren zusätzlich und in Einklang mit $\Sigma_\emptyset = \{0\} = \Sigma_1$, dass $H_0(0) := K$ sei.

Um eine Basis von H_n zu finden und die Multiplikation bezüglich dieser Basis zu verstehen, benötigen wir ein besseres Verständnis von Σ_n als Coxetergruppe. Hierfür sind reduzierte Ausdrücke und Abstiege von großer Bedeutung:

Definition 1.8. Betrachte eine Permutation $\sigma \in \Sigma_n$. Wir bezeichnen die Menge $\{1, ..., n-1\}$ mit $\underline{n-1}$.

(i) Es sei k minimal mit der Eigenschaft, dass es $i_1, ..., i_k \in \underline{n-1}$ gibt mit $\sigma = \sigma_{i_1}...\sigma_{i_k}$. Dann heißt $l(\sigma) := k$ die Länge von σ und $(\sigma_{i_1}, ..., \sigma_{i_k})$ ein reduzierter Ausdruck für σ.

(ii) Die Menge der Abstiege von σ ist definiert als

$$\mathrm{Des}(\sigma) := \{i \in \underline{n-1} | \sigma(i) > \sigma(i+1)\}.$$

Lemma 1.9. Es gibt genau dann einen reduzierten Ausdruck $(\sigma_{i_1}, ..., \sigma_{i_k})$ für $\sigma \in \Sigma_n$ mit $\sigma_{i_k} = \sigma_l$, wenn $\mathrm{l}(\sigma\sigma_l) < \mathrm{l}(\sigma)$ ist. Es ist $\mathrm{l}(\sigma\sigma_l) = \mathrm{l}(\sigma) \pm 1$.

Beweis. Offensichtlich ist $\mathrm{l}(\sigma\sigma_{i_k}) < \mathrm{l}(\sigma)$. Ist andererseits σ_l mit $\mathrm{l}(\sigma\sigma_l) < \mathrm{l}(\sigma)$ gegeben und ist $(\sigma_{j_1}, ..., \sigma_{j_m})$ ein reduzierter Ausdruck für $\sigma\sigma_l$, so ist $\sigma = \sigma\sigma_l\sigma_l = \sigma_{j_1}...\sigma_{j_m}\sigma_l$, und der rechte Ausdruck hat höchstens Länge $m+1 \leq \mathrm{l}(\sigma)$. Also ist $(\sigma_{j_1}, ..., \sigma_{j_m}, \sigma_l)$ ein reduzierter Ausdruck für σ.
Zu $\mathrm{l}(\sigma\sigma_l) = \mathrm{l}(\sigma) \pm 1$: Es sei $(\sigma_{i_1}, ..., \sigma_{i_k})$ ein reduzierter Ausdruck für σ. Ist $\mathrm{l}(\sigma\sigma_l) < \mathrm{l}(\sigma)$, also $i_k = l$, so ist $(\sigma_{i_1}, ..., \sigma_{i_{k-1}})$ wieder ein reduzierter Ausdruck, denn andernfalls ließe sich ein reduzierter Ausdruck einer Länge kleiner k für σ konstruieren. Wegen $\sigma_{i_1}...\sigma_{i_{k-1}} = \sigma_{i_1}...\sigma_{i_{k-1}}\sigma_l\sigma_l = \sigma\sigma_l$ hat $\sigma\sigma_l$ Länge $k-1$.
Andererseits ist wegen Bemerkung 1.6 klar, dass $\sigma\sigma_l$ nicht die gleiche Länge wie σ_l haben kann, denn die einzige Relation, die einen Ausdruck verkürzt oder verlängert, ist (1_Σ).
Ist schließlich $\mathrm{l}(\sigma\sigma_l) > \mathrm{l}(\sigma)$, so ist $(\sigma_{i_1}, ..., \sigma_{i_k}, \sigma_l)$ ein Ausdruck für $\sigma\sigma_l$ der Länge $k+1$. Damit folgt die Behauptung. □

Lemma 1.10. Für $\sigma \in \Sigma_n$ ist $l \in \mathrm{Des}(\sigma)$ genau dann, wenn $l(\sigma\sigma_l) < l(\sigma)$ ist.

Beweis. Es sei $l \notin \mathrm{Des}(\sigma)$, es sei weiter $\sigma = \sigma_{i_1}...\sigma_{i_k}$ mit $l(\sigma) = k$. Angenommen, es ist $i_k = l$. Dann betrachte das maximale s mit $l \notin \mathrm{Des}(\sigma_{i_s}...\sigma_{i_k})$. Setze $\alpha := \sigma_{i_s}...\sigma_{i_k}, \beta := \sigma_{i_{s+1}}...\sigma_{i_k}$. Dann ist also $\alpha(l) < \alpha(l+1)$ und $\beta(l) > \beta(l+1)$. Man sieht leicht, dass dann $\sigma_{i_s} = \sigma_{\beta(l)}$ und $\beta(l+1) = \beta(l)+1$ sein muss.
Setze $\tau = \sigma_{i_{s+1}}...\sigma_{i_{k-1}}$. Dann gilt für $q \neq l, l+1$, dass

$$\beta(q) = \sigma_{i_{s+1}}...\sigma_{i_k}(q) = \sigma_{i_{s+1}}...\sigma_{i_{k-1}}(q) = \tau(q),$$

also $\alpha(q) = \sigma_{\beta(l)}\beta(q) = \beta(q) = \tau(q)$ wegen $\beta(l+1) = \beta(l)+1$.
Wäre nun $\tau(l) = \alpha(l+1)$ und $\tau(l+1) = \alpha(l)$, so wäre

$$\alpha(l) = \sigma_{i_s}\tau\sigma_{i_k}(l) = \sigma_{i_s}\tau\sigma_l(l) = \sigma_{i_s}\alpha(l) = \beta(l)$$

und analog $\alpha(l+1) = \beta(l+1)$, Widerspruch. Es ist also $\alpha(l) = \tau(l)$ und $\alpha(l+1) = \tau(l+1)$, also insgesamt $\alpha = \tau$. Dies ist unmöglich, da $l(\alpha) \neq l(\tau)$ ist. Damit kann nicht $i_k = l$ gewesen sein, es gibt also keinen reduzierten Ausdruck für σ, der auf σ_l endet, und es ist $l(\sigma\sigma_l) > l(\sigma)$.
Nun nehmen wir umgekehrt an, dass $l \in \mathrm{Des}(\sigma)$ ist und $\sigma = \sigma_{i_1}...\sigma_{i_k}$ mit $l(\sigma) = k$. Es ist $\sigma\sigma_l(l) = \sigma(l+1)$ und $\sigma\sigma_l(l+1) = \sigma(l)$, also $l \notin \mathrm{Des}(\sigma\sigma_l)$, nach dem oben Gezeigten ist also $l(\sigma) = l(\sigma\sigma_l\sigma_l) > l(\sigma\sigma_l)$. □

Lemma 1.11. (siehe siehe [24]) Ist $(\sigma_{i_1}, ..., \sigma_{i_k})$ ein reduzierter Ausdruck für $\sigma \in \Sigma_n$, so definieren wir $T_\sigma := T_{i_1}...T_{i_k}$. Weiter setzen wir $T_{\mathrm{id}} := 1$.
Es gilt: T_σ ist unabhängig vom gewählten reduzierten Ausdruck für σ, und es ist

$$T_i T_\sigma = \begin{cases} -T_\sigma, & \text{falls } i \in \mathrm{Des}(\sigma^{-1}), \\ T_{\sigma_i\sigma}, & \text{falls } i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1}). \end{cases}$$

Beweis. Es sei $\sigma = \sigma_{i_1}...\sigma_{i_k} = \sigma_{j_1}...\sigma_{j_k}$ mit $l(\sigma) = k$. Dann lässt sich $\sigma_{i_1}...\sigma_{i_k}$ durch endlich viele Anwendungen der Relationen (2_Σ) und (3_Σ) in $\sigma_{j_1}...\sigma_{j_k}$ überführen, denn die Anwendung von (2_Σ) und (3_Σ) auf einen reduzierten Ausdruck liefert wiederum einen reduzierten Ausdruck, und ist die Anwendung von (1_Σ) auf einen Ausdruck möglich, so ist der Ausdruck nicht reduziert. Wendet man analog die Relationen (2) und (3) auf $T_{i_1}...T_{i_k}$ an, erhält man $T_{j_1}...T_{j_k}$. Die Formel für $T_i T_\sigma$ folgt sofort aus der eben gezeigten Wohldefiniertheit und Lemma 1.10. □

Satz 1.12. Die Familie $(T_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_N}$ ist eine K-Basis von H_n für $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. (siehe [20, S.6]) Wegen 1.11 ist klar, dass die T_σ ein Erzeugendensystem von H_n bilden.
Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis $(e_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_n}$. Wir werden H_n als Unteralgebra von $\mathrm{End}_K(V)$ auffassen und damit die lineare Unabhängigkeit der T_σ beweisen.
Für $1 \le i \le n-1$ sei $\theta(T_i) := \theta_i \in \mathrm{End}_K(V)$ gegeben durch

$$\theta_i(e_\sigma) := \begin{cases} e_{\sigma_i\sigma}, & \text{falls } \mathrm{l}(\sigma_i\sigma) > \mathrm{l}(\sigma) \\ -e_\sigma, & \text{falls } \mathrm{l}(\sigma_i\sigma) < \mathrm{l}(\sigma). \end{cases}$$

Es ist klar, dass $\theta_i(\theta_i(e_\sigma)) = -\theta_i(e_\sigma)$ ist. Um zu zeigen, dass obige Vorschrift tatsächlich einen wohldefinierten Homomorphismus $H_n \to \mathrm{End}_K(V)$ liefert, ist wegen 1.6 und 1.7 nur zu zeigen, dass $\theta_{i_1}....\theta_{i_k}(e_\sigma) = \theta_{j_1}...\theta_{j_k}(e_\sigma)$ ist, falls $(\sigma_{i_1},...,\sigma_{i_k})$ und $(\sigma_{j_1},...,\sigma_{j_k})$ zwei reduzierte Ausdrücke für $\omega \in \Sigma_n$ sind.
Definiere $\vartheta_i \in \mathrm{End}_K(V)$ durch

$$\vartheta_i(e_\sigma) := \begin{cases} e_{\sigma\sigma_i}, & \text{falls } \mathrm{l}(\sigma\sigma_i) > \mathrm{l}(\sigma) \\ -e_\sigma, & \text{falls } \mathrm{l}(\sigma\sigma_i) < \mathrm{l}(\sigma). \end{cases}$$

Dann ist $\theta_i \circ \vartheta_j = \vartheta_j \circ \theta_i$: Man unterscheide hierzu nach Länge von $\sigma_i\sigma, \sigma\sigma_j$ und $\sigma_i\sigma\sigma_j$. Beispielsweise ist für $\mathrm{l}(\sigma_i\sigma) < \mathrm{l}(\sigma) < \mathrm{l}(\sigma\sigma_j)$

$$\theta_i \circ \vartheta_j(e_\sigma) = \theta_i(e_{\sigma\sigma_j}) \quad \text{und} \quad \vartheta_j \circ \theta_i(e_\sigma) = -\vartheta(e_\sigma) = -e_{\sigma\sigma_j}.$$

Mit Lemma 1.9 ist $\mathrm{l}(\sigma_i\sigma\sigma_j) \le \mathrm{l}(\sigma_i\sigma) + 1 < \mathrm{l}(\sigma) + 1$, aber auch $\mathrm{l}(\sigma_i\sigma\sigma_j) \ge \mathrm{l}(\sigma\sigma_j) - 1 > \mathrm{l}(\sigma) - 1$, also ist $\mathrm{l}(\sigma_i\sigma\sigma_j) = \mathrm{l}(\sigma) < \mathrm{l}(\sigma\sigma_j)$ und damit $\theta_i(e_{\sigma\sigma_j}) = -e_{\sigma\sigma_j}$.
Analog zeigt man $\theta_i \circ \vartheta_j(e_\sigma) = \vartheta_j \circ \theta_i(e_\sigma)$ in allen anderen möglichen Fällen.
Wir zeigen nun die Wohldefiniertheit von $\theta(e_\sigma)$ durch Induktion nach $\mathrm{l}(\sigma)$: Für $\sigma = \mathrm{id}$ ist $\theta_{i_1}...\theta_{i_k}(e_{\mathrm{id}}) = e_\omega$ für jeden reduzierten Ausdruck $(\sigma_{i_1},..,\sigma_{i_k})$ für ω, da ausschließlich Fall 1 der Definition von θ_r eintritt.
Ist $\sigma \in \Sigma_n$ mit $\mathrm{l}(\sigma) > 0$, so gibt es ein σ_m mit $\mathrm{l}(\sigma\sigma_m) < \mathrm{l}(\sigma)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \theta_{i_1}....\theta_{i_k}(e_\sigma) &= \theta_{i_1}....\theta_{i_k}\vartheta_m(e_{\sigma\sigma_m}) \\ &= \vartheta_m\theta_{i_1}....\theta_{i_k}(e_{\sigma\sigma_m}) \\ &= \vartheta_m\theta_{j_1}...\theta_{j_k}(e_{\sigma\sigma_m}) \\ &= \theta_{j_1}...\theta_{j_k}\vartheta_m(e_{\sigma\sigma_m}) \\ &= \theta_{j_1}...\theta_{j_k}(e_\sigma). \end{aligned}$$

Also ist $\theta\colon H_n \to \mathrm{End}_K(V)$ ein wohldefinierter Homomorphismus von Algebren.
Sind nun $\lambda_\sigma \in K$ mit $\sum_{\sigma\in\Sigma} \lambda_\sigma T_\sigma = 0$, so ist auch

$$0 = \theta(\sum_{\sigma\in\Sigma} \lambda_\sigma T_\sigma)(e_{\mathrm{id}}) = \sum_{\sigma\in\Sigma} \lambda_\sigma e_\sigma,$$

also müssen alle $\lambda_\sigma = 0$ sein, da die e_σ linear unabhängig sind. □

1.3 Darstellungen von H_n

Wir bestimmen nun die einfachen H_n-Moduln. Nach Satz 1.5 kennen wir dann die Gruppenstruktur von $\mathcal{G}_0(H_n)$, denn H_n ist als endlichdimensionaler K-Vektorraum linksartinsch. Die Faktoren einer Kompositionsreihe von H_n sind nach Definition einfache H_n-Moduln. Umgekehrt erhält man jeden einfachen H_n-Modul auf diese Weise:

Lemma 1.13. Es sei A eine R-Algebra. Jeder einfache A-Modul M ist isomorph zu einem Faktor einer Kompositionsreihe von A.

Beweis. Betrachte für $m \in M, m \neq 0$ die Abbildung $\tau\colon A \to M, a \mapsto am$. Wegen $1m = m \neq 0$ ist $\operatorname{Im}(\tau) \neq 0$, also $\operatorname{Im}(\tau) = M$, da M einfach ist. Damit ist $M \cong A/\ker(\tau)$ als A-Modul.
Die Kette $\ker(\tau) \subset A$ lässt sich zu einer Kompositionsreihe von A verfeinern. Da $A/\ker(\tau)$ einfach ist, ist $\ker(\tau)$ ein maximales Linksideal von A, also ist $A/\ker(\tau)$ ein Faktor dieser Kompositionsreihe. □

Definition 1.14. Für $I \subset \underline{n-1}$ definieren wir eine Darstellung $\lambda_I\colon H_n \to \operatorname{End}_K(K)$ durch

$$\lambda_I(T_i) \mapsto \begin{cases} -\mathrm{id}_K, & i \in I, \\ 0, i \notin I, \end{cases}$$

siehe [24]. Man sieht leicht, dass λ_I wohldefiniert ist, beispielsweise ist $\lambda_I(T_i)^2 = \mathrm{id}_K = -\lambda_I(T_i)$ für $i \in I$.
Der durch λ_I definierte H_n-Modul sei mit C_I bezeichnet

Satz 1.15. Für $n \geq 1$ gibt es genau 2^{n-1} verschiedene irreduzible Darstellungen von H_n, und zwar $\lambda_I, I \subset \underline{n-1}$.
Die einzige irreduzible Darstellung von H_0 ist $\lambda_\emptyset = (1 \mapsto \mathrm{id}_K)$.

Beweis. (siehe [24]) Es sei $\Sigma_n = \{s_1, ...s_{n!}\}$ mit $l(s_i) \leq l(s_{i+1})$ und $J_i \subset H_n$ das von $\{T_{s_i}, ..., T_{s_{n!}}\}$ erzeugte Ideal. Dann ist

$$0 =: J_{n+1} \subset J_n \subset ... \subset J_1 = H_n$$

eine Kompositionsreihe von H_n mit eindimensionalen Faktoren, folglich sind nach Lemma 1.13 alle einfachen H_n-Moduln bzw. alle irreduziblen Darstellungen von H_n eindimensional über K. Umgekehrt ist natürlich jede Darstellung $H_n \to \operatorname{End}_K(K)$ aus Dimensionsgründen irreduzibel.
Es sei $\phi\colon H_n \to \operatorname{End}_K(K) \cong K$ eine beliebige Darstellung. Da ϕ ein Homomorphismus von Algebren ist, ist ϕ durch die Werte $\phi(T_i) =: \alpha_i \in K$ bereits vollständig bestimmt. Wegen

$$-\alpha_i = \phi(-T_i) = \phi(T_i^2) = \phi(T_i)^2 = \alpha_i^2$$

muss jedes α_i gleich 0 oder -1 sein, also ist $\phi = \lambda_I$ für ein $I \subset \underline{n-1}$.
Es bleibt zu zeigen, dass für $I \neq J$ auch $\lambda_I \neq \lambda_J$ ist. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $i \in I \setminus J$ ist. Angenommen, es gibt ein $f \in \operatorname{End}_K(K)$ mit $f \circ \lambda_I(h) = \lambda_J(h) \circ f$ für alle $h \in H_n$. Dann ist

$$0 = f \circ (k \mapsto 0) = f \circ \lambda_J(T_i) = \lambda_I(T_i) \circ f = -\mathrm{id}_K \circ f = -f,$$

also ist $f = 0$, also kein Isomorphismus. □

1.4 Nichtkommutative symmetrische und quasisymmetrische Funktionen

Die direkte Summe $\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{G}_0(\mathbb{Z}[\Sigma_n])$ besitzt eine Hopfalgebrastruktur und ist isomorph zur Hopfalgebra Symm der symmetrischen Funktionen. Wir werden später zeigen, dass analog die direkte Summe der $\mathcal{G}_0(H_n)$ eine Hopfalgebra ist, die isomorph zu der Hopfalgebra der quasisymmetrischen Funktionen QSymm ist, die Darstellungen der aus Deformation von $\mathbb{Z}[\Sigma_n]$ erhaltenen 0-Heckealgebren entsprechen also einer Verallgemeinerung der symmetrischen Funktionen. Zunächst sammeln wir einige Fakten über Hopfalgebren.

Definition 1.16. Es sei R ein kommutativer Ring. Eine R-Koalgebra ist ein R-Modul C zusammen mit R-linearen Abbildungen

$$\Delta\colon C \to C \otimes_R C \quad \text{(Komultiplikation)} \qquad \text{und} \qquad \epsilon\colon C \to R \quad \text{(Koeins)}$$

so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes_R C \arrow[d, "\mathrm{id}_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes_R C \arrow[r, "\Delta \otimes \mathrm{id}_C"] & C \otimes_R C \otimes_R C \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\cong"] & \\ R \otimes_R C & C \otimes_R C \arrow[l, "\epsilon \otimes \mathrm{id}_C"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C \otimes \epsilon"] & C \otimes_R R \end{tikzcd}$$

kommutieren. Die Koalgebra C heißt kokommutativ, wenn $T \circ \Delta = \Delta$ ist, dabei ist $T(c \otimes d) = d \otimes c$.
Sind C und D R-Koalgebren, so heißt ein R-Modulhomomorphismus $f\colon C \to D$ ein Homomorphismus von Koalgebren, wenn die Diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes_R C \arrow[r, "f \otimes f"] & D \otimes_R D \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_C"] & D \arrow[d, "\epsilon_D"] \\ R \arrow[r, "id"] & R \end{tikzcd}$$

kommutieren. Das Konzept der Koalgebra und der damit verwandten Begriffe ist also dual zu dem der Algebra: Die Definitionen entsprechen den Definitionen für Algebren in der dualen Kategorie.

Bemerkung 1.17. (siehe [23])

(i) Jeder kommutative Ring R ist eine kokommutative Koalgebra mit Komultiplikation $\Delta_R(r) := r \otimes 1$ und Koeins id_R.

(ii) Sind A und B R-Algebren, so ist $A \otimes_R B$ eine R-Algebra mit Multiplikation

$$\mu_{A\otimes B} := (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\mathrm{id}_A \otimes T \otimes \mathrm{id}_B).$$

Sind A und B unitär, so ist $A \otimes B$ unitär mit Eins $\eta_{A\otimes B} := (\eta_A \otimes \eta_B) \circ \Delta_R$.

(iii) Dual dazu gilt: Sind C und D R-Koalgebren, so gibt es auf $C \otimes_R D$ eine koassoziative Komultiplikation

$$\Delta_{C\otimes D} := (\mathrm{id}_C \otimes T \otimes \mathrm{id}_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D).$$

und Koeinsen von C und D liefern eine Koeins $\epsilon_{C\otimes D} := \mu_R \circ (\epsilon_C \otimes \epsilon_D)$.

Definition 1.18. (i) Eine unitäre R-Algebra B mit Multiplikation μ und Eins η heißt R-Bialgebra, wenn B gleichzeitig eine Koalgebra mit Komultiplikation Δ und Koeins ϵ ist und eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(a) μ und η sind Homomorphismen von Koalgebren.

(b) Δ und ϵ sind Homomorphismen von unitären Algebren.

Ein Bialgebrahomomorphismus ist ein Homomorphismus von unitären Algebren, der gleichzeitig ein Koalgebrahomomorphismus ist.

(ii) Eine R-Bialgebra H heißt Hopfalgebra, wenn es eine R-lineare Abbildung $\chi\colon H \to H$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H \otimes_R H \arrow[rr, "\chi\otimes\mathrm{id}_H"] & & H \otimes_R H \arrow[d, "\mu"] \\
H \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[r, "\epsilon"] & R \arrow[r, "\eta"] & H \\
H \otimes_R H \arrow[rr, "\mathrm{id}_H\otimes\chi"] & & H \otimes_R H \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Sind G und H Hopfalgebren, so heißt ein Homomorphismus von Bialgebren $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus von Hopfalgebren, falls $f \circ \chi_G = \chi_H \circ f$ ist.

Beispiel 1.19. Die Gruppenalgebra $R[G]$ einer Gruppe G ist eine R-Hopfalgebra mit Komultiplikation $g \mapsto g \otimes g$ und Koeins $g \mapsto 1 \in R$ für $g \in G$. Die Antipode ist gegeben durch $g \mapsto g^{-1}$ (siehe [27, S.72]).

Definition 1.20. Eine R-Algebra A heißt graduiert, wenn $A \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$ ist als abelsche Gruppe und $A_sA_t \subset A_{s+t}$ sowie $RA_s \subset A_s$ ist für alle s,t. Insbesondere ist dann $\eta(S) \subset A_0$.
Analog heißt eine R-Koalgebra C graduiert, wenn $C \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$ ist als abelsche Gruppe und $\Delta(C_n) \subset \bigoplus_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$ sowie $RC_n \subset C_n$ ist für alle n. Insbesondere ist dann $\epsilon(c) = 0$ für alle $c \in \bigoplus_{n>0} C_n$.
Ein Homomorphismus graduierter (Ko-)Algebren ist ein (Ko-)Algebrahomomorphismus $f\colon A \to B$ mit $f(A_n) \subset B_n$.
Eine Hopfalgebra H heißt graduiert, wenn sie als Bialgebra, also als Algebra und Koalgebra graduiert ist und $\chi(H_n) \subset H_n$ gilt.

Bemerkung 1.21. Eine graduierte R-Bialgebra B heißt zusammenhängend, wenn $\eta\colon R \to B_0$ und $\epsilon\colon B_0 \to R$ Isomorphismen sind. Man kann zeigen , dass dann

$$G(B,B) := \{f \in \mathrm{Hom}_R(B,B) | f_{|B_0}\colon B_0 \to B_0 \text{ ist ein Isomorphismus }\}$$

mit $f * g := \mu \circ (f \otimes_R g) \circ \Delta$ eine Gruppe mit Einselement $\eta\epsilon$ ist, siehe zum Beispiel [23, S.259]. Ein Blick auf das definierende Diagramm für Antipoden zeigt, dass $(\mathrm{id})^{-1}$ die eindeutig bestimmte Antipode von B ist, jede zusammenhängende Bialgebra besitzt also genau eine Hopfalgebrastruktur.

Bemerkung 1.22. Es sei H eine Hopfalgebra mit Antipode χ. Dann ist χ ein Antihomomorphismus, d.h. für $g,h \in H$ ist $\chi(gh) = \chi(h)\chi(g)$ (siehe [27, S.74]).

Bevor wir die Hopfalgebra NSymm und die zu NSymm duale Hopfalgebra QSymm kennenlernen, werfen wir einen kurzen Blick auf die Hopfalgebra der symmetrischen Funktionen Symm, die durch NSymm und QSymm verallgemeinert wird. Für einen weitergehenden Überblick über das elegante Zusammenspiel dieser drei Hopfalgebren sei auf Hazewinkel [12] verwiesen.

Die Elemente in Symm sind unter bestimmten Vertauschungen invariante, im Grad beschränkte Potenzreihen:

Definition 1.23. Es seien $X_1, X_2, ...$ abzählbar viele kommutierende Unbestimmte. Eine Potenzreihe in $X_1, X_2, ...$ mit Koeffizienten in R ist eine Abbildung

$$f\colon \bigcup_{k\geq 0}(\{I \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})| \quad |I| = k\} \times \mathbb{N}^k) \to R,$$

jedem Monom $X_{i_1}^{j_1}...X_{i_k}^{j_k}$ wird also ein Koeffizient aus R zugeordnet. Man schreibt auch

$$f(X_1, X_2, ...) = \sum_{\substack{i_1<...<i_k \\ (j_1,...,j_k)\in\mathbb{N}^k}} f(\{i_1, ..., i_k\}, (j_1, ..., j_k))X_{i_1}^{j_1}...X_{i_k}^{j_k}.$$

Der Grad $\deg(f)$ von f sei definiert als das Supremum aller Grade von Monomen mit nichttrivialem Koeffizienten. Beispielsweise ist $\deg(\sum_{j=1}^{\infty} X_1^j) = \infty$ und $\deg(\sum_{i=1}^{\infty} X_i) = 1$ Die Menge aller Potenzreihen in $X_1, X_2, ...$ mit Koeffizienten in R sei mit $R\langle\langle X_1, X_2, ...\rangle\rangle$ bezeichnet. Die Menge aller Potenzreihen in $R\langle\langle X_1, X_2, ...\rangle\rangle$, deren Grad beschränkt, also ungleich ∞ ist, bezeichnen wir mit $R^b\langle\langle X_1, X_2, ...\rangle\rangle$.
Für $f, g \in R\langle\langle X_1, X_2, ...\rangle\rangle$ definieren wir wie üblich $f + g$ durch punktweise Addition und $f \cdot g$ durch

$$(f\cdot g)(X_1, X_2, ...) = \sum_{\substack{i_1<...<i_k, r_1<...<r_l \\ (j_1,...,j_k),(s_1,...,s_l)}} f(\{i_1, ..., i_k\}, (j_1, ..., j_k))g(\{r_1, ..., r_l\}, (s_1, ..., s_l))X_{i_1}^{j_1}...X_{i_k}^{j_k}X_{r_1}^{s_1}...X_{r_l}^{s_l}$$

Mit diesen Verknüpfungen bildet $R\langle\langle X_1, X_2, ...\rangle\rangle$ einen Ring mit Eins, und $R^b\langle\langle X_1, X_2, ...\rangle\rangle$ ist ein Unterring von $R\langle\langle X_1, X_2, ...\rangle\rangle$.

Definition 1.24. Eine Potenzreihe

$$f = \sum_{\substack{i_1<...<i_k \\ (j_1,...,j_k)\in\mathbb{N}^k}} r_{\{i_1,...,i_k\},(j_1,...,j_k)}X_{i_1}^{j_1} \cdot ... \cdot X_{i_k}^{j_k} \in R^b\langle\langle X_1, X_2, ...\rangle\rangle$$

von beschränktem Grad heißt symmetrisch, wenn gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$, für alle $\sigma \in \Sigma_n$ ist

$$f(X_1, X_2, ...) = f(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}, X_{n+1}, ...).$$

Eine Potenzreihe von beschränktem Grad ist also symmetrisch, wenn sie invariant unter Vertauschung endlich vieler Variablen ist. Summe und Produkt symmetrischer Potenzreihen von beschränktem Grad sind wieder symmetrisch, der Ring der symmetrischen Potenzreihen in $R^b\langle\langle X_1, X_2, ...\rangle\rangle$ wird mit $\mathrm{Symm}(R)$ bezeichnet [13].

Bemerkung 1.25. (siehe [12]) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir symmetrische Potenzreihen durch

$$\begin{aligned} z_n(X_1, X_2, ...) &:= \sum_{1 \le i_1 < ... < i_n} X_{i_1} ... X_{i_n}, \\ z_0 &:= 1. \end{aligned}$$

Die z_n heißen elementarsymmetrische Polynome. Der Fundamentalsatz über symmetrischen Polynome (siehe [18, S.21]) liefert , dass $\mathrm{Symm}(R) = R[z_1, z_2, ...]$ ist, jede symmetrische Potenzreihe von beschränktem Grad ist ein Polynom in den z_n.
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathrm{Symm}_n(R) := \{f \in R[z_1, z_2, ..] | \, f \text{ ist homogen vom Grad } n\}$. Dann ist $\mathrm{Symm}(R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{Symm}_n(R)$ eine zusammenhängende graduierte Hopfalgebra mit Komultiplikation

$$\Delta_S \colon \mathrm{Symm}(R) \to \mathrm{Symm}(R) \otimes_R \mathrm{Symm}(R), \quad z_n \mapsto \sum_{i=0}^{n} z_i \otimes z_{n-i}$$

und Koeins $\quad \epsilon_S \colon \mathrm{Symm}(R) \to R, \quad z_n \mapsto \delta_{0,n}$.

Wie eben beschrieben lässt sich $\mathrm{Symm}(R)$ auch ganz ohne den Hintergrund symmetrischer Potenzreihen als die Algebra der Polynome in abzählbar vielen kommutierenden Unbestimmten auffassen. Betrachtet man stattdessen Polynome in nichtkommutierenden Unbestimmten, so erhält man mit analog definierten Operationen die Hopfalgebra $\mathrm{NSymm}(R)$. Monome in nichtkommutierenden Unbestimmten entsprechen Kompositionen:

Definition 1.26. Eine Komposition von $n \in \mathbb{N}_0$ ist ein Tupel $\alpha = (a_1, ..., a_k)$ mit $a_j \in \mathbb{N}$ und $\sum_{j=1}^{k} a_j = n$. Wir schreiben dafür kurz $\alpha \models n$. Das Gewicht von α ist $\mathrm{wt}(\alpha) := n$, die Länge der Komposition ist $\mathrm{l}(\alpha) := k$. Für die leere Komposition $()$ setzen wir $\mathrm{wt}(()) = \mathrm{l}(()) = 0$.
Eine Komposition $\beta = (b_1, ..., b_l)$ heißt feiner als α, kurz $\beta \succeq \alpha$, wenn $l \geq k$ ist und es $1 = i_0 < i_1 < ... < i_k = l$ gibt mit $b_{i_j} + b_{i_j+1} + ... + b_{i_{j+1}-1} = a_{j+1}$ für $j = 0, ..., k-1$.
Durch $\succeq$ ist eine partielle Ordnung auf der Menge aller Kompositionen definiert.
Beispielsweise ist $(1,1,1,1) \succeq (1,2,1) \succeq (3,1) \succeq (4)$, aber nicht $(1,1,2) \succeq (3,1)$.

Definition 1.27. Es sei $\mathrm{NSymm}(R) := R\langle Z_1, Z_2, ...\rangle$ der Ring der Polynome in den abzählbar unendlich vielen nichtkommutierenden Unbestimmten $Z_n, n \in \mathbb{N}$. Für eine Komposition α setze $Z_\alpha := Z_{a_1} ... Z_{a_k}$, weiter sei $Z_{()} := 1$.
Bezeichnet $\mathrm{NSymm}_n(R)$ die von den Monomen $\{Z_\alpha | \mathrm{wt}(\alpha) = n\}$ in $\mathrm{NSymm}(R)$ erzeugte (freie) abelsche Gruppe, so ist $\mathrm{NSymm}(R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathrm{NSymm}_n(R)$ ein graduierter Ring. Für $\mathrm{NSymm}(\mathbb{Z})$ schreiben wir kurz NSymm.

Satz 1.28. Bezeichne $\mu_N \colon \mathrm{NSymm}(R) \otimes_R \mathrm{NSymm}(R) \to \mathrm{NSymm}(R)$ die Multiplikation von Polynomen in $\mathrm{NSymm}(R)$ und $\eta_N \colon R \to \mathrm{NSymm}(R)$ die übliche Einbettung von R in $\mathrm{NSymm}(R)$. Definiere R-Algebrahomomorphismen durch

$$\begin{aligned} \Delta_N \colon \quad & \mathrm{NSymm}(R) \to \mathrm{NSymm}(R) \otimes_R \mathrm{NSymm}(R), \qquad && Z_n \mapsto \sum_{i=0}^{n} Z_i \otimes Z_{n-i}, \\ \epsilon_N \colon \quad & \mathrm{NSymm}(R) \to R, && Z_n \mapsto \delta_{0,n} \end{aligned}$$

sowie einen Antihomomorphismus von R-Algebren durch

$$\chi_N\colon\quad \mathrm{NSymm}(R) \to \mathrm{NSymm}(R), \qquad Z_n \mapsto \sum_{\substack{\alpha \text{ Komposition,}\\ \mathrm{wt}(\alpha)=n}} (-1)^{\mathrm{l}(\alpha)} Z_\alpha.$$

Dabei sei $Z_0 := 1$. Dann ist $(\mathrm{NSymm}(R), \mu_N, \eta_N, \Delta_N, \epsilon_N, \chi_N)$ eine graduierte zusammenhängende Hopfalgebra [12].

Beweis. Man rechnet Koassoziativität und die Eigenschaft der Koeins leicht auf den Z_n nach. Es gilt für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mu_N \circ (\mathrm{id} \otimes \chi_S) \circ \Delta_N(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n} Z_i \chi_N(Z_{n-i}) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{\alpha \text{ Komposition,}\\ \mathrm{wt}(\alpha)=n-i}} (-1)^{\mathrm{l}(\alpha)} Z_i Z_\alpha \\
&= \sum_{\substack{\alpha \text{ Komposition,}\\ \mathrm{wt}(\alpha)=n}} (-1)^{\mathrm{l}(\alpha)} Z_0 Z_\alpha + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\alpha \text{ Komposition,}\\ \mathrm{wt}(\alpha)=n-i}} (-1)^{\mathrm{l}(\alpha)} Z_i Z_\alpha \\
&= \sum_{\substack{\alpha \text{ Komposition,}\\ \mathrm{wt}(\alpha)=n}} (-1)^{\mathrm{l}(\alpha)} Z_\alpha + \sum_{\substack{\alpha \text{ Komposition,}\\ \mathrm{wt}(\alpha)=n}} (-1)^{\mathrm{l}(\alpha)-1)} Z_\alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

und

$$\mu_N \circ (\mathrm{id} \otimes \chi_N) \circ \Delta_N(Z_0) = Z_0 \chi_N(Z_0) = 1.$$

$\square$

Eine andere Verallgemeinerung von Symm erhält man, indem man die Bedingung der Symmetrie abschwächt: Eine Potenzreihe ist symmetrisch, wenn der Koeffizient eines Monoms nur von der Anzahl der darin auftretenden Variablen und den auftretenden Potenzen abhängt, insbesondere aber nicht davon, welche Potenz zu welcher Variable gehört. Bei quasisymmetrischen Potenzreihen hingegen ist genau das nicht egal:

Definition 1.29. Eine Potenzreihe

$$f = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_k \\ (j_1,\ldots,j_n) \in \mathbb{N}^k}} r_{\{i_1,\ldots,i_k\},(j_1,\ldots,j_k)} X_{i_1}^{j_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_k}^{j_k} \in R^b\langle\langle X_1, X_2, \ldots\rangle\rangle$$

von beschränktem Grad heißt quasisymmetrisch, falls gilt: Für alle $(j_1, \ldots, j_k) \in \mathbb{N}^k$, für alle $I, J \subset \mathbb{N}$ mit $|I| = |J| = k$ ist

$$r_{I,(j_1,\ldots,j_n)} = r_{J,(j_1,\ldots,j_n)}.$$

Es spielt also für den Koeffizienten eines Monoms keine Rolle, welche Variablen darin genau auftreten, aber es ist wichtig, in welcher Reihenfolge den Variablen die Koeffizienten zugeordnet werden.
Die Menge der quasisymmetrischen beschränkten Potenzreihen in $R[X_1, X_2, \ldots]$ wird mit $\mathrm{QSymm}(R)$ bezeichnet, wir setzen wieder $\mathrm{QSymm} := \mathrm{QSymm}(\mathbb{Z})$.

Wenn $|I| = |J| < \infty$ ist, gibt es stets eine Permutation von endlich vielen Variablen, so dass I auf J abgebildet wird, also sind symmetrische Potenzreihen auch quasisymmetrisch. Hingegen ist beispielsweise $\sum_{1 \leq i < j} X_i X_j^2$ zwar quasisymmetrisch, aber unter keiner Transposition invariant.

Bemerkung 1.30. Es ist offensichtlich, dass die Summe quasisymmetrischer beschränkter Potenzreihen wieder quasisymmetrisch ist. Für das Produkt sieht man dies wie folgt: Es seien $I, J \subset \mathbb{N}$ endlich von gleicher Ordnung und $\phi \in \Sigma_{\mathbb{N}}$ eine Bijektion mit $\phi(I) = J$. Es seien weiter $f, g \in$ QSymm(R). Dann ist

$$\begin{aligned}
& (f \cdot g)(I, (t_1, ..., t_k)) \\
= & \sum_{\substack{M,N \subset \mathbb{N} \\ M \cup N = I}} \sum_{\substack{(r_1,...,r_k),(s_1,...,s_l) \\ r_a + s_b = t_c, \text{ falls } l_a = n_b = i_c}} f(M, (r_1, ..., r_k)) g(N, (s_1, ..., s_l)) \\
= & \sum_{\substack{M,N \subset \mathbb{N} \\ M \cup N = I}} \sum_{\substack{(r_1,...,r_k),(s_1,...,s_l) \\ r_a + s_b = t_c, \text{ falls } l_a = n_b = i_c}} f(\phi(L), (r_1, ..., r_{k_l})) g(\phi(N), (s_1, ..., s_{k_n})) \\
= & \sum_{\substack{\phi(M),\phi(N) \subset \mathbb{N} \\ \phi(M) \cup \phi(N) = \phi(I)}} \sum_{\substack{(r_1,...,r_k),(s_1,...,s_l) \\ r_a + s_b = t_c, \text{ falls } \phi(l_a) = \phi(n_b) = \phi(i_c)}} f(\phi(L), (r_1, ..., r_{k_l})) g(\phi(N), (s_1, ..., s_{k_n})) \\
= & (f \cdot g)(J, (t_1, ..., t_k)).
\end{aligned}$$

Wie Symm ist also auch QSymm ein graduierter Ring, die Graduierung ist durch die Grade der Potenzreihen gegeben.

Definition 1.31. Es sei $\alpha = (a_1, ..., a_k)$ eine Komposition. Wir definieren quasisymmetrische Potenzreihen durch

$$M_\alpha := \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k} X_{i_1}^{a_1} ... X_{i_k}^{a_k} \qquad \text{und} \qquad M_{()} := 1$$

sowie

$$F_\alpha := \sum_{\beta \succeq \alpha} M_\beta.$$

Die Potenzreihe M_α heißt die zu α assoziierte monomiale quasisymmetrische Funktion, F_α heißt quasi-Ribbon-Funktion [17].
Da die Koeffizienten $f(I, (j_i, ..., j_k))$ einer quasisymmetrischen Potenzreihe f nur von $(j_1, ..., j_k)$ abhängen ($|I| = k$ ist durch $(j_1, ..., j_k)$ festgelegt) und der Grad von f beschränkt ist, ist QSymm(R) ein freier R-Modul mit Basis $(M_\alpha)_{\alpha \text{ Komposition}}$.
Weiter ist $M_\alpha = \sum_{\beta \succeq \alpha} (-1)^{l(\beta) - l(\alpha)} F_\beta$, also ist auch $(F_\alpha)_{\alpha \text{ Komposition}}$ eine Basis von QSymm(R).

Bemerkung 1.32. Bezüglich der Basis $(M_\alpha)_{\alpha \text{ Komposition}}$ ist die Multiplikation in QSymm(R) durch das overlapping shuffle product („überlappendes Mischprodukt“) gegeben: Es seien $\alpha = (a_1, ..., a_k)$ und $\beta = (b_1, ..., b_l)$ Kompositionen, dann ist

$$M_\alpha M_\beta = \sum_{\substack{i_1 < ... < i_k \\ j_1 < .. < j_l}} X_{i_1}^{a_1} ... X_{i_k}^{a_k} X_{j_1}^{b_1} ... X_{j_l}^{b_l},$$

dabei ist für $i_m = j_q$ der Exponent von X_{i_m} gleich $a_m + b_q$.
Für $1 \le r_1 < ... < r_n$ ist der Koeffizient von $X_{r_1}^{s_1} ... X_{r_n}^{s_n}$ in $M_\alpha M_\beta$ (d.h. der Koeffizient von $M_{(s_1,...,s_n)}$, wenn wir das Produkt wieder bezüglich der Basis ausdrücken) also gleich der Anzahl der Möglichkeiten, α und β mit Nullen zu Tupeln $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ der Länge n aufzufüllen, so dass $\tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i = s_i$ ist. Dies kann offensichtlich nur gelingen, wenn $\max(k, l) \le n \le k + l$ ist. Beispielsweise ist

$$M_{(1)} M_{(1)} = 2M_{(1,1)} + M_{(2)}.$$

Wir versuchen, dies formaler zu beschreiben: Ein Tupel $\gamma = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{N}_0^k$ heißt eine schwache Komposition von $\sum_{i=1}^n c_i$, ihre Länge ist $l(\gamma) := n$. Für jede schwache Komposition c von n erhält man eine Komposition $\pi(c)$ von n, indem man die Einträge gleich 0 aus c entfernt.
Definieren wir also das overlapping shuffle product zunächst für zwei Kompositionen α und β als formale Summe von Kompositionen

$$\alpha \cdot_{\text{olp}} \beta := \sum_{r=\max(k,l)}^{k+l} \sum_{\substack{\tilde{\alpha},\tilde{\beta} \text{ schwache Komp. der Länge } r \\ \pi(\tilde{\alpha})=\alpha, \pi(\tilde{\beta})=\beta, \tilde{\alpha}_i+\tilde{\beta}_i \neq 0}} (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\alpha}_r + \tilde{\beta}_r),$$

dann ist $M_\alpha M_\beta = M_{\alpha \cdot_{\text{olp}} \beta}$, wenn man $M_{\gamma+\tau} := M_\gamma + M_\tau$ setzt. So ist zum Beispiel für $a, b, c \geq 1$

$$(a, b) \cdot_{\text{olp}} (c) = (a, b, c) + (a, c, b) + (c, a, b) + (a + c, b) + (a, b + c).$$

QSymm(R) ist nicht nur eine weitere Verallgemeinerung von Symm(R), sondern steht auch mit NSymm(R) in engem Zusammenhang: QSymm(R) ist graduiert dual zu NSymm(R).

Definition 1.33. Es sei $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} M_n$ ein graduierter R-Modul, d.h. es ist $RM_n \subset M_n$. Dann heißt der graduierte R-Modul

$$M' := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \operatorname{Hom}_R(M, R)$$

der graduiert duale Modul zu M.
Dualisieren ist ein kontravarianter Funktor: Mit $f\colon M \to N$ ist auch

$$f'\colon N' \to M', n' \mapsto (m \mapsto n'(f(m)))$$

ein Homomorphismus graduierter R-Moduln, und es ist $(f \circ g)' = g' \circ f'$ sowie $\mathrm{id}' = \mathrm{id}$.

Das folgende Lemma ermöglicht es, auf dem graduiert Dualen einer Bialgebra unter bestimmten Bedingungen wieder eine Bialgebrastruktur zu definieren. Das Lemma gilt auch noch, wenn man statt freien Moduln projektive Moduln betrachtet. Da wir aber nur mit freien Bialgebren arbeiten, setzen wir gradweise freie Moduln voraus.

Lemma 1.34. Es seien M, N graduierte R-Moduln, es seien weiter M_n und N_n frei und endlich erzeugt für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\lambda\colon M' \otimes N' \to (M \otimes N)', \quad m' \otimes n' \mapsto (m \otimes n \mapsto m'(m)n'(n))$$

ein Isomorphismus graduierter R-Moduln [23].
Sind R-lineare Abbildungen $f\colon M \to \tilde{M}$ und $g\colon N \to \tilde{N}$ gegeben, so ist

$$\lambda \circ (f' \otimes g') = (f \otimes g)' \circ \lambda,$$

λ ist also natürlich in M und N.

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass λ ein Homomorphismus graduierter R-Moduln und natürlich ist. Das Duale eines freien endlich erzeugten R-Moduls mit Basis $(e_i)_{1\leq i\leq k}$ ist wieder frei über R mit Basis

$$(e_i')_{1\leq i\leq k}, \quad e_i'(e_j) := \delta_{i,j}.$$

Sind (m_i) und (n_i) Basen von M_a und N_b über R, so rechnet man nach, dass $\lambda(m_i'\otimes n_j') = (m_i\otimes n_j)'$ ist.
Da $((M\otimes N)_n)' = (\bigoplus_{a+b=n} M_a\otimes N_b)'$ kanonisch isomorph zu $\bigoplus_{a+b=n}(M_a\otimes N_b)'$ ist, zeigt dies die Behauptung. $\square$

Lemma 1.35. (siehe [23])

(i) Es sei (A,μ,η) eine graduierte R-Algebra, so dass A_n frei und endlich erzeugt ist für alle $n\in\mathbb{N}_0$. Dann ist A' eine graduierte Koalgebra mit

$$\text{Komultiplikation } \tilde{\Delta} := \lambda^{-1}\circ\mu' \colon \quad A' \longrightarrow (A\otimes A)' \longrightarrow A'\otimes A',$$

$$\text{und Koeins } \tilde{\epsilon} := \phi^{-1}\circ\eta' \colon \quad A' \longrightarrow R' \xrightarrow[\cong]{\phi^{-1}} R\,.$$

(ii) Ist (C,Δ,ϵ) eine graduierte R-Koalgebra, so dass C_n frei ist für alle $n\in\mathbb{N}_0$, so ist C' eine graduierte R-Algebra mit

$$\text{Multiplikation } \tilde{\mu} := \Delta'\circ\lambda \colon \quad C'\otimes C' \longrightarrow (C\otimes C)' \longrightarrow C',$$

$$\text{und Eins } \tilde{\eta} := \epsilon'\circ\phi \colon \quad R \xrightarrow[\cong]{\phi} R' \longrightarrow C'\,.$$

(iii) Ist B eine Bialgebra und frei und endlich erzeugt in jedem Grad, so ist auch B' mit den hier definierten Abbildungen eine Bialgebra. Ist B zusammenhängend, so ist auch B' zusammenhängend.
Ist B eine Hopfalgebra mit Antipode χ, so ist auch B' eine Hopfalgebra mit Antipode χ'.

Beweis. Mithilfe der Funktorialität von $'$ und der Natürlichkeit von λ lassen sich die Behauptungen leicht nachrechnen, wir zeigen als Beispiel, dass $\tilde{\Delta}$ die Multiplikation respektiert. Es ist also zu zeigen, dass das äussere Rechteck im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
B'\otimes B' \arrow[r, "\mu'\otimes\mu'"] \arrow[d, "\lambda"] & (B\otimes B)'^{\otimes 2} \arrow[r, "\lambda^{-1}\otimes\lambda^{-1}"] \arrow[d, "\lambda"] & B'^{\otimes 4} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes T\otimes\mathrm{id}"] & B'^{\otimes 4} \arrow[d, "\lambda\otimes\lambda"] \\
(B\otimes B)' \arrow[r, "(\mu\otimes\mu)'"] \arrow[d, "\Delta'"] & (B^{\otimes 4})' \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes T\otimes\mathrm{id})'"] & (B^{\otimes 4})' \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, "(\Delta\otimes\Delta)'"] & (B\otimes B)'^{\otimes 2} \arrow[d, "\Delta'\otimes\Delta'"] \\
B' \arrow[rr, "\mu'"] & & (B\otimes B)' \arrow[r, "\lambda^{-1}"] & B'\otimes B'
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Das linksuntere Rechteck kommutiert, da μ die Komultiplikation in B respektiert. Die Rechtecke links oben und rechts unten kommutieren wegen der Natürlichkeit von λ. Dass das Rechteck rechts oben ebenfalls kommutiert, lässt sich problemlos ausrechnen. Die Aussagen über die Graduierung von B' und den Zusammenhang sind klar. $\square$

Satz 1.36. Bezeichne μ_Q die Multiplikation quasisymmetrischer Potenzreihen und $\eta_Q \colon R \to \mathrm{QSymm}(R)$ die Einbettung von R in $\mathrm{QSymm}(R)$. Weiter sei

$$\Delta_Q \colon \mathrm{QSymm}(R) \to \mathrm{QSymm}(R) \otimes_R \mathrm{QSymm}(R), \quad M_{(a_1,..,a_k)} \mapsto \sum_{i=0}^{k} M_{(a_1,...a_i)} \otimes M_{(a_{i+1},...a_k)},$$

$$\epsilon_Q \colon \mathrm{QSymm}(R) \to R, \quad M_\alpha \mapsto \delta_{\alpha,()}.$$

Dann ist $(\mathrm{QSymm}(R), \mu_Q, \eta_Q, \Delta_Q, \epsilon_Q)$ eine graduierte zusammenhängende Bialgebra, also eine Hopfalgebra, und

$$\Phi \colon \mathrm{QSymm}(R) \to \mathrm{NSymm}(R)', \quad M_\alpha \mapsto (Z_\beta \mapsto \langle Z_\beta, M_\alpha \rangle := \delta_{\beta,\alpha})$$

ist ein Isomorphismus von Hopfalgebren [12].

Beweis. Die Bijektivität von Φ ist offensichtlich, und dass

$$\Phi\eta_Q = \tilde{\eta}_N, \quad (\Phi \otimes \Phi)\Delta_Q = \tilde{\Delta}_N \Phi \quad \text{und} \quad \epsilon_Q = \tilde{\epsilon}_N \Phi$$

ist, rechnet man leicht nach. Es bleibt zu zeigen, dass $\Phi\mu_Q = \tilde{\mu}_N(\Phi \otimes \Phi)$ ist. Nun ist mit $\gamma = (c_1, ..., c_n)$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mu}_N(\Phi \otimes \Phi)(M_\alpha \otimes M_\beta))(Z_\gamma) &= (\Delta'_N \lambda(\langle -, M_\alpha \rangle \otimes \langle -, M_\beta \rangle))(Z_\gamma) \\
&= (\lambda(\langle -, M_\alpha \rangle \otimes \langle -, M_\beta \rangle))(\Delta_N Z_\gamma) \\
&= \sum_{i_1=0}^{c_1} \dots \sum_{i_n=0}^{c_n} \langle Z_{i_1} \dots Z_{i_n}, M_\alpha \rangle \langle Z_{c_1-i_1} \dots Z_{c_n-i_n}, M_\beta \rangle \\
&= \sum_{i_1=0}^{c_1} \dots \sum_{i_n=0}^{c_n} \delta_{\pi((i_1,\dots,i_n)),\alpha} \cdot \delta_{\pi((c_1-i_1,\dots,c_n-i_n)),\beta}.
\end{aligned}$$

Andererseits ist $(\Phi\mu_Q(M_\alpha \otimes M_\beta))(Z_\gamma) = \langle Z_\gamma, M_\alpha M_\beta \rangle$, und der Koeffizient von γ in $\alpha \cdot_{\mathrm{olp}} \beta$ ist gleich der Anzahl der Paare $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, so dass $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ schwache Kompositionen der Länge n sind mit $\pi(\tilde{\alpha}) = \alpha, \pi(\tilde{\beta}) = \beta$ und $\tilde{\alpha}_i + \tilde{\beta}_i = c_i$. Dies entspricht genau obiger Summe. Die durch Φ auf QSymm definierte Bialgebrastruktur stimmt also mit den oben definierten Abbildungen überein, insbesondere ist $\mathrm{QSymm}(R)$ eine Bialgebra und damit eine Hopfalgebra. Da die Antipode eindeutig ist, folgt die behauptete Isomorphie von Hopfalgebren. □

Für später halten wir fest:

Lemma 1.37. Ist B eine graduierte Bialgebra und in jedem Grad frei und endlich erzeugt, so ist $B \cong (B')'$.

Beweis. Betrachte $\Phi \colon B \to (B')', b \mapsto (\alpha \mapsto \alpha(b))$. Wähle eine Basis (b_i) von B_n. Für die im Beweis von Lemma 1.34 definiert Basis (b'_i) von B'_n gilt dann

$$\Phi(b_i)(b'_j) = b'_j(b_i) = \delta_{i,j},$$

also ist $\Phi(b_i) = b_i''$ und Φ ist bijektiv.
Der Beweis, dass Φ ein Homomorphismus von Bialgebren ist, verläuft ähnlich wie der Beweis von Satz 1.35: Man rechnet nach, dass Φ natürlich in B ist und dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} B \otimes B \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Phi\otimes\Phi"] & (B \otimes B)'' \arrow[d, "\lambda'"] \\ B'' \otimes B'' \arrow[r, "\lambda"] & (B' \otimes B')' \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\phi"'] & K'' \arrow[d, "\phi'"] \\ & K' \end{tikzcd}$$

kommutieren. Damit sieht man leicht, dass Φ die Strukturen erhält. □

Wir können nun einen ersten Zusammenhang zwischen $\mathcal{G}_0(H_n)$ und QSymm angeben. Die einfachen H_n-Moduln sind indiziert über Teilmengen von $\underline{n-1}$. Die Basis $(F_\alpha)_{\alpha\models n}$ der quasisymmetrischen Potenzreihen vom Grad n , also von QSymm_n, ist über Kompositionen $\alpha \models n$ indiziert. Teilmengen von $\underline{n-1}$ und Kompositionen von n stehen aber in Bijektion zueinander:

Bemerkung 1.38. Für eine Komposition $\alpha = (a_1, ..., a_k)$ von n setze

$$D(\alpha) := \{a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + ... + a_{k-1}\},$$

für $I = \{i_1 < ... < i_l\} \subset \{1, ..., n-1\}$ definiere eine Komposition von n durch

$$C(I) := (i_1, i_2 - i_1, ..., i_l - i_{l-1}, n - i_l).$$

Die Abbildungen C und D sind zueinander invers und bezueglich $\preceq$ und $\subset$ ordnungserhaltend [17].

Korollar 1.39. Es sei $\mathcal{G}_0(H) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_0(H_n)$. Nach Satz 1.5 ist $\mathcal{G}_0(H_n)$ die freie abelsche Gruppe auf den $[C_I], I \subset \underline{n-1}$. Für einen endlich erzeugten H_n-Modul M mit $[M] = \sum_{j=1}^{k}[C_{I_j}]$ definiere $\mathcal{F}\colon \mathcal{G}_0(H) \to \mathrm{QSymm}$ durch

$$\mathcal{F}([M]) := \sum_{j=1}^{k} F_{C(I_j)}.$$

Bemerkung 1.38 liefert, dass $\mathcal{F}$ ein Isomorphismus graduierter abelscher Gruppen ist.

Natürlich ist damit auch $\mathcal{G}_0(H) \cong \mathrm{NSymm}$ als abelsche Gruppe. Wir werden aber im folgenden sehen, dass $\mathcal{F}$ sogar ein Isomorphismus von Bialgebren ist. Dass $\mathcal{F}$ die Algebrastruktur respektiert, wird in [7] behauptet und für einen Spezialfall bewiesen. Hazewinkel erwähnt in [12], dass $\mathcal{F}$ ein Isomorphismus von Bialgebren ist, in den dort angegebenen Referenzen ist allerdings kein Beweis zu finden.

2 Die Bialgebra $\mathcal{G}_0(H)$

2.1 Induktion und Restriktion in $\mathcal{G}_0(H)$

Als nächstes werden wir ein Produkt auf $\mathcal{G}_0(H)$ definieren. Sind M und N zwei H_a- bzw. H_b-Moduln, so ist $M \otimes_K N$ ein $H_a \otimes_K H_b$-Modul. Wir können $H_a \otimes_K H_b$ als Unteralgebra von H_{a+b} auffassen via

$$H_a \otimes_K H_b \to H_{a+b}, \quad T_i \otimes 1 \mapsto T_i \text{ für } i \in \underline{a-1}, \quad 1 \otimes T_j \mapsto T_{a+j} \text{ für } j \in \underline{b-1}.$$

Eine Warnung: Wir werden, wie auch hier, im Folgenden oft nicht notieren, über welchen Ring ein Tensorprodukt definiert wird, um die Ausdrücke lesbarer zu halten.
Für eine beliebige Unteralgebra B einer K-Algebra A und einen B-Modul M erhält man einen A-Modul

$$\mathrm{Ind}_B^A(M) := A \otimes_B L,$$

den durch L induzierten A-Modul. Wir erhalten also aus einem H_a- und einem H_b-Modul einen H_{a+b}-Modul, indem wir Induktion auf das Tensorprodukt der beiden Moduln anwenden. Um zu zeigen, dass dies eine wohldefinierte Verknüpfung in $\mathcal{G}_0(H)$ liefert, müssen wir die Struktur von H_{a+b} als $H_a \otimes H_b$-Modul besser kennen. Diese basiert wiederum auf einer Zerlegung der symmetrischen Gruppe:

Definition 2.1. Es seien $a, b \in \mathbb{N}_0$ und $I \subset \underline{a+b-1}$. Dann sei

$$\mathcal{D}^a_{a+b} := \{\sigma \in \Sigma_{a+b} | \mathrm{Des}(\sigma) \subset \{a\}\}$$

die Menge, die aus der Identität und den Permutationen, deren reduzierte Ausdrücke alle auf σ_a enden, besteht, und

$$\tilde{\Sigma}^a_{a+b} := \langle \sigma_1, ..., \sigma_{a-1}, \sigma_{a+1}, ..., \sigma_{a+b-1} \rangle$$

die von den Transpositionen $\sigma_i, i \neq a$, erzeugte Untergruppe in Σ_{a+b}.

Lemma 2.2. Es seien $a, b \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma \in \Sigma_{a+b}$. Dann gibt es genau ein $\alpha \in \mathcal{D}^a_{a+b}$ und genau ein $\beta \in \tilde{\Sigma}^a_{a+b}$ mit $\sigma = \alpha\beta$, und es ist $l(\sigma) = l(\alpha) + l(\beta)$.

Beweis. Es sei $l(\sigma) = l$. Betrachte das Minimum $l - s$ der Menge

$$\{k \in \mathbb{N}_0 | \text{ Es gibt } i_1, ..., i_l \in \underline{a+b-1} \text{ mit } i_{k+1}, ..., i_l \neq a, \text{ so dass } \sigma = \sigma_{i_1} ... \sigma_{i_l}\},$$

also die Länge des längsten Wortes ohne σ_a, auf das ein reduzierter Ausdruck für σ endet. Es sei $\sigma = \sigma_{i_1} ... \sigma_{i_l}$ ein solcher reduzierter Ausdruck mit $i_{s+1}, ... i_l \neq a$. Dann ist offenbar $\alpha := \sigma_{i_1} ... \sigma_{i_s} \in \mathcal{D}^a_{a+b}$ und $\beta := \sigma_{i_{s+1}} ... \sigma_{i_l} \in \tilde{\Sigma}^a_{a+b}$ sowie $l(\sigma) = l(\alpha) + l(\beta)$.
Zur Eindeutigkeit: Es seien α', β' zwei weitere Elemente mit $\sigma = \alpha'\beta'$ und $\alpha' \in \mathcal{D}^a_{a+b}, \beta' \in \tilde{\Sigma}^a_{a+b}$. Dann ist $\alpha'\beta'\beta^{-1} = \alpha \in \mathcal{D}^a_{a+b}$. Wir zeigen, dass dann $\beta'\beta^{-1} = \mathrm{id}$ ist. Angenommen, es gibt ein $k \in \mathrm{Des}(\beta'\beta^{-1})$. Dann ist $k \neq a$, denn es ist $\beta'\beta^{-1} \in \tilde{\Sigma}^a_{a+b}$.
Drei Fälle sind zu unterschieden: Ist $a < \beta'\beta^{-1}(k+1) < \beta'\beta^{-1}(k)$, so ist

$$\alpha'(a) < \alpha'\beta'\beta^{-1}(k+1) < \alpha'\beta'\beta^{-1}(k)$$

wegen $\mathrm{Des}(\alpha') \subset \{a\}$. Dann ist aber $k \in \mathrm{Des}(\alpha)$, das ist unmöglich. Analog kann nicht $\beta'\beta^{-1}(k+1) < \beta'\beta^{-1}(k) \leq a$ sein. Es ist also $\beta'\beta^{-1}(k) > a \geq \beta'\beta^{-1}(k+1)$. Dies ist aber nicht möglich, da $\beta'\beta^{-1}(\{1, ..., a\}) = \{1, ...a\}$ ist wegen $\beta'\beta^{-1} \in \tilde{\Sigma}^a_{a+b}$.
Also muss $\mathrm{Des}(\beta'\beta^{-1}) = \emptyset$ sein, also $\beta'\beta^{-1} = \mathrm{id}$ und damit $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$. $\square$

Korollar 2.3. Der $H_a \otimes_K H_b$-Rechtsmodul H_{a+b} ist frei mit Basis $(T_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}}$.

Beweis. Nach Lemma 2.2 gibt es für alle $\sigma \in \Sigma_{a+b}$ eindeutig bestimmte $\alpha \in \mathcal{D}^a_{a+b}, \beta \in \tilde{\Sigma}^a_{a+b}$ mit $T_\sigma = T_\alpha T_\beta$. Da $(T_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_{a+b}}$ eine K-Basis von H_{a+b} ist, folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 2.4. Analog oder mit $\Sigma_n^{-1} = \Sigma_n$ zeigt man, dass H_{a+b} ein freier $H_a \otimes_K H_b$-Linksmodul mit Basis $(T_\sigma)_{\sigma^{-1} \in \mathcal{D}^a_{a+b}}$ ist.

Es ist klar, dass das Tensorprodukt $M \otimes N$ endlich erzeugter H_a- bzw. H_b-Moduln wieder endlich erzeugt ist. Da H_{a+b} ein endlich erzeugter $H_a \otimes H_b$-Modul ist, ist auch $\mathrm{Ind}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b}$ endlich erzeugt. Um eine wohldefinierte Abbildung auf $\mathcal{G}_0(H)$ zu erhalten, müssen wir noch überprüfen, was mit kurzen exakten Sequenzen geschieht:

Lemma 2.5. Es sei

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von H_a-Moduln und $\tilde{M}$ ein H_b-Moduln. Dann ist

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ind}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b}(L \otimes \tilde{M}) \longrightarrow \mathrm{Ind}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b}(M \otimes \tilde{M}) \longrightarrow \mathrm{Ind}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b}(N \otimes \tilde{M}) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $H_{a+b}-$Moduln.

Beweis. Da $\tilde{M}$ ein K-Vektorraum ist, ist

$$0 \longrightarrow L \otimes \tilde{M} \longrightarrow M \otimes \tilde{M} \longrightarrow N \otimes \tilde{M} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von K-Vektorräumen und damit auch von $H_a \otimes H_b$-Moduln. Mit Korollar 2.3 folgt die Exaktheit der zweiten Sequenz. $\square$

Nun können wir die gewünschte Verknüpfung definieren. Dabei unterscheiden wir hier und im folgenden in der Notation einen Modul M nicht mehr von dem durch M definierten Element in $\mathcal{G}_0(H)$. Wie am Ende von 1.3 angesprochen stammt die folgende Definition aus [7].

Definition 2.6. Das Induktionsprodukt in $\mathcal{G}_0(H)$ ist die lineare Abbildung definiert durch

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G}_0(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}_0(H) \to \mathcal{G}_0(H), \quad M \otimes_{\mathbb{Z}} N \mapsto \mathrm{Ind}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes_K H_b}(M \otimes_K N).$$

Sie respektiert offensichtlich die Graduierung, d.h. es ist $\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_0(H_a)) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathcal{G}_0(H_b))) \subset \mathcal{G}_0(H_{a+b})$.

Wir haben nicht gezeigt, dass $\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}}$ assoziativ ist. Man kann dies direkt nachrechnen, wir verzichten darauf, da wir später ohnehin sehen werden, dass $\mathcal{G}_0(H)$ isomorph zu QSymm ist.

Die Komultiplikation in $\mathcal{G}_0(H)$ entsteht durch Restriktion von Moduln: Ist A eine K-Algebra und B eine Unteralgebra von A, so ist jeder A-Modul M auch ein B-Modul durch Einschränkung der A-Operation auf B. Wir bezeichnen den so erhaltenen B-Modul mit $\mathrm{Res}^A_B(M)$.
Ist A endlich erzeugt über B, so ist die Restriktion endlich erzeugter Moduln wieder

endlich erzeugt. Weiter liefern kurze exakte Sequenzen von A-Moduln unter Restriktion kurze exakten Sequenzen von B-Moduln. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\mathrm{Res}^{H_{a+b}}_{H_a\otimes H_b}\colon \mathcal{G}_0(H_{a+b}) \to \mathcal{G}_0(H_a \otimes_K H_b).$$

Das ist aber natürlich noch nicht das gewünschte Ergebnis: Wir möchten eine Komultipliaktion, also eine Abbildung nach $\mathcal{G}_0(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}_0(H)$.

Lemma 2.7. Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$ ist die Abbildung

$$\Phi_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{G}_0(H_a) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}_0(H_b) \to \mathcal{G}_0(H_a \otimes_K H_b), \quad M \otimes_{\mathbb{Z}} N \mapsto M \otimes_K N$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Betrachte die Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_0(H_a \otimes_K H_b) \arrow[dr, "A"'] & & \mathcal{G}_0(H_a) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}_0(H_b) \arrow[dl, "B"] \\ & \mathcal{G}_0(H_{a+b}) & \end{tikzcd}$$

Dabei ordnet A einem $H_a \otimes H_b$-Modul M den H_{a+b}-Modul zu, der als abelsche Gruppe M entspricht und auf dem die T_i mit $i \neq a$ wie bisher operieren und für den $T_a m = 0$ ist für alle $m \in M$. Dies liefert eine wohldefinierte H_{a+b}-Modulstrukter: Kein $T_\sigma = T_{i_1}...T_{i_k}$ mit $i_l \neq a$ für alle l wird durch die Relationen aus 1.7 in ein Produkt mit Faktor T_a überführt. A ist wohldefiniert und linear, denn kurze exakte Sequenzen von $H_a \otimes H_b$-Moduln werden auf kurze exakte Sequenzen von H_{a+b}-Moduln abgebildet.
Die lineare Abbildung B ist definiert durch $B(C_I \otimes C_J) := C_{I\cup J}$.
Da kurze exakte Sequenzen von H_{a+b}-Moduln auch immer kurze exakte Sequenzen von $H_a \otimes H_b$-Moduln sind, ist A injektiv. Das Bild von A ist die von $\{C_K | a \notin K \subset \underline{a+b-1}\}$ erzeugte Untergruppe: Ist C_{K_1} bzw. C_{K_2} der den Mengen $K_1 \subset \underline{a-1}$ bzw $K_2 \subset \underline{b-1}$ zugeordnete H_a- bzw. H_b-Modul, so wird $C_{K_1} \otimes C_{K_2}$ von A auf $C_{K_1 \cup K_2}$ abgebildet. Umgekehrt befinden sich im Bild nur Linearkombinationen von Isomorphieklassen von Moduln, auf denen T_a trivial operiert, und da $(C_I)_{I\subset \underline{a+b-1}}$ eine Basis von $\mathcal{G}_0(H_{a+b})$ ist, folgt die Behauptung.
Offenbar ist B injektiv, und das Bild von B ist gleich dem Bild von A. Wir erhalten also einen Isomorphismus $A^{-1}B$ zwischen den betrachteten Gruppen, dieser entspricht der im Satz angegebenen Abbildung $\Phi_{\mathcal{G}}$. $\square$

Definition 2.8. Das Restriktionskoprodukt in $\mathcal{G}_0(H)$ ist die lineare Abbildung definiert durch

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{G}_0(H) \to \mathcal{G}_0(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}_0(H), \quad \mathcal{G}_0(H_n)M \mapsto \Phi_{\mathcal{G}}^{-1}(\bigoplus_{a+b=n} \mathrm{Res}^{H_n}_{H_a\otimes H_b}(M)).$$

Es ist $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_0(H_n)) \subset \bigoplus_{a+b=n} \mathcal{G}_0(H_a) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}_0(H_b)$, also respektiert $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}$ die Graduierung.

Auch hier ließe sich leicht, aber umständlich nachrechnen, dass $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}$ koassoziativ ist, und man könnte zeigen, dass $\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}}$ und $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}$ eine Bialgebrastruktur auf $\mathcal{G}_0(H)$ definieren. Wir verschieben diese Einsichten auf später, ebenso wie den Beweis dafür, dass die beiden folgenden Abbildungen Eins und Koeins in $\mathcal{G}_0(H)$ sind.

Definition 2.9. Es ist $H_0 = K$, und K ist der einzige einfache K-Modul. Wir definieren also lineare Abbildungen $\eta_{\mathcal{G}}$, $\epsilon_{\mathcal{G}}$ durch

$$\eta_{\mathcal{G}} \colon \mathbb{Z} \to \mathcal{G}_0(H), \quad 1 \mapsto K \in \mathcal{G}_0(H_0)$$

und

$$\epsilon_{\mathcal{G}} \colon \mathcal{G}_0(H) \to \mathbb{Z}, \quad \mathcal{G}_0(H_n) \ni x \mapsto \begin{cases} r - s, & \text{falls } n = 0 \text{ und } x = K^r - K^s \in \mathcal{G}_0(H_0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.2 $\mathcal{F}$ erhält die Multiplikation

Wir wollen nun zeigen, dass der Isomorphismus $\mathcal{F} \colon \mathcal{G}_0(H) \to \mathrm{QSymm}$ abelscher Gruppen aus 1.39 ein Isomorphismus von Ringen ist. Zunächst betrachten wir das Produkt einfacher Moduln in $\mathcal{G}_0(H)$ genauer. Wir suchen eine K-Basis des induzierten Moduls, um dann dessen H_{a+b}-Modulstruktur zu beschreiben:

Lemma 2.10. Es seien $I \subset \underline{a-1}$, $J \subset \underline{b-1}$ und

$$M_{I,J} := \mathrm{Ind}_{H_a \otimes_K H_b}^{H_{a+b}} (C_I \otimes C_J).$$

Dann ist $M_{I,J}$ zyklisch, es gibt also ein $e \in M_{I,J}$ mit $M_{I,J} = H_{a+b}e$.
Eine K- Basis von $M_{I,J}$ ist durch $(T_\sigma e)_{\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a}$ gegeben.

Beweis. (siehe [7]) Da $\dim_K(C_I) = \dim_K(C_J) = 1$ ist, sind C_I und C_J zyklisch. Es gibt also $e_I \in C_I$ und $e_J \in C_J$ mit $C_I = H_a e_I$ und $C_J = H_b e_J$. Setze

$$e := 1_{H_{a+b}} \otimes_{H_a \otimes H_b} (e_I \otimes e_J),$$

dann ist $M_{I,J} = H_{a+b}e$.
Nach Korollar 2.3 haben wir Isomorphismen von K-Vektorräumen

$$\begin{aligned} H_{a+b} \otimes_{H_a \otimes H_b} (C_I \otimes C_J) &\cong \Big(\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a} T_\sigma (H_a \otimes H_b)\Big) \otimes_{H_a \otimes H_b} (C_I \otimes C_J) \\ &\cong \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a} (T_\sigma (H_a \otimes H_b)) \otimes_{H_a \otimes H_b} (C_I \otimes C_J) \\ &\cong \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a} (H_a \otimes H_b) \otimes_{H_a \otimes H_b} (C_I \otimes C_J) \\ &\cong \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a} (C_I \otimes C_J) \\ &\cong K^{|\mathcal{D}_{a+b}^a|}, \end{aligned}$$

und für $\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a$ entspricht $T_\sigma e$ unter den obigen Isomorphismen gerade dem Standardbasisvektor $(\delta_{\sigma,\tau})_{\tau \in \mathcal{D}_{a+b}^a}$ in $K^{|\mathcal{D}_{a+b}^a|}$. $\square$

Was passiert nun, wenn wir ein Element $T_\sigma e$ obiger K-Basis von $M_{I,J}$ mit einem T_i multiplizieren? Klar ist: Falls $i \in \mathrm{Des}(\sigma^{-1})$ ist, ist

$$T_i(T_\sigma e) = (T_i T_\sigma)e = -T_\sigma e.$$

Falls $i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1})$ ist, wird es schwieriger: Dann müssen wir die reduzierten Ausdrücke für $\sigma_i\sigma$ darauf untersuchen, auf welche σ_j sie enden. Falls $\sigma_i\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}$ ist, ist $T_{\sigma_i\sigma}e$ wieder ein Basiselement, falls nicht, lässt sich der letzte Faktor dieses reduzierten Ausdrucks (bzw. das zugehörige T_j) auf $e = e_I \otimes e_J$ anwenden. Eventueller Verwirrung möge das folgende Beispiel vorbeugen:

Beispiel 2.11. Es sei $a = 2, b = 4$ und $I = \{1\} \subset \underline{1}$ sowie $J = \{1,2\} \subset \underline{3}$. Dann ist beispielsweise $\sigma_3\sigma_2 \in \mathcal{D}^2_5$, also $T_{\sigma_3\sigma_2}e$ ein Element der in Lemma 2.10 bestimmten Basis von $\mathrm{Ind}^{H_6}_{H_2\otimes H_4}(C_I \otimes C_J)$. Die Operation von H_5 auf diesem Element ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
T_1T_{\sigma_3\sigma_2}e &= T_{\sigma_1\sigma_3\sigma_2}e \quad \text{mit } \sigma_1\sigma_3\sigma_2 \in \mathcal{D}^2_5,\\
T_2T_{\sigma_3\sigma_2}e &= T_{\sigma_2\sigma_3\sigma_2}e = T_{\sigma_3\sigma_2\sigma_3}e = T_{\sigma_3\sigma_2}((1\otimes T_1)e_I \otimes e_J) = -T_{\sigma_3\sigma_2}e,\\
&\quad \text{denn } T_3 \in H_6 \text{ entspricht } 1 \otimes T_1 \in H_2 \otimes H_4 \text{ unter der Injektion}\\
&\quad H_2 \otimes H_4 \to H_6,\\
T_3T_{\sigma_3\sigma_2}e &= T_3^2T_2e = -T_3T_2e = -T_{\sigma_3\sigma_2}e,\\
T_4T_{\sigma_3\sigma_2}e &= T_{\sigma_4\sigma_3\sigma_2}e,\\
T_5T_{\sigma_3\sigma_2}e &= T_{\sigma_5\sigma_3\sigma_2}e = T_{\sigma_3\sigma_2\sigma_5}e = T_{\sigma_3\sigma_2}((1\otimes T_3)e_I \otimes e_J) = 0.
\end{aligned}$$

Das folgende Lemma 2.13 liefert, dass wir auch in den Fällen, in denen $i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1})$ ist, höchstens einmal auf die Struktur von $C_I \otimes C_J$ als $H_a \otimes H_b$-Modul zurückgreifen müssen. Vorher notieren wir noch eine einfache Beobachtung, die wir im Folgenden mehrmals benötigen.

Lemma 2.12. Für $\sigma \in \Sigma_n, i \in \underline{n-1}$ ist $\mathrm{Des}(\sigma_i\sigma) \subset \mathrm{Des}(\sigma) \cup \{\sigma^{-1}(i)\}$.

Beweis. Eine Fallunterscheidung liefert die Behauptung. □

Lemma 2.13. Es sei $\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}$ und $i \in \underline{a+b-1}$ mit $i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1})$. Dann ist

$$\sigma_i\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}$$

oder es ist

$$\sigma_i\sigma = \sigma\sigma_{\sigma^{-1}(i)}.$$

Beweis. Setze $j := \sigma^{-1}(i)$. Angenommen, es ist $\sigma_i\sigma \notin \mathcal{D}^a_{a+b}$. Dann ist nach Lemma 2.12 $j \in \mathrm{Des}(\sigma_i\sigma) \setminus \mathrm{Des}(\sigma)$.
Also ist $\sigma(j) < \sigma(j+1)$, aber $\sigma_i\sigma(j) > \sigma_i\sigma(j+1)$. Folglich muss σ_i gerade $\sigma(j)$ und $\sigma(j+1)$ vertauschen, also ist $\sigma(j+1) = i+1 = \sigma(j)+1$.
Damit ist für $s \in \{1, ..., n+m\}$

$$\begin{aligned}
\sigma_i\sigma\sigma_j(s) &= \begin{cases} \sigma_i\sigma(s), & \text{falls } s \neq j, j+1\\ \sigma_i\sigma(j+1), & \text{falls } s = j\\ \sigma_i\sigma(j), & \text{falls } s = j+1 \end{cases}\\
&= \begin{cases} \sigma(s), & \text{falls } s \neq j, j+1\\ \sigma_i(i+1), & \text{falls } s = j\\ \sigma_i(i), & \text{falls } s = j+1 \end{cases}\\
&= \begin{cases} \sigma(s), & \text{falls } s \neq j, j+1\\ \sigma(j), & \text{falls } s = j\\ \sigma(j)+1, & \text{falls } s = j+1 \end{cases}\\
&= \sigma(s).
\end{aligned}$$

□

Nun sind wir in der Lage, die H_{a+b}-Modulstruktur von $M_{I,J}$ zu beschreiben, ohne explizit nach möglichen reduzierten Ausdrücken zu unterscheiden.

Lemma 2.14. Die Operation von H_{a+b} auf $M_{I,J}$ ist gegeben durch

$$T_iT_\sigma e = \begin{cases} -T_\sigma e, & \text{falls } i \in \mathrm{Des}(\sigma^{-1}), \\ T_{\sigma_i\sigma}e, & \text{falls } i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1}) \text{ und } \sigma_i\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}, \\ 0, & \text{falls } i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1}), \sigma_i\sigma \notin \mathcal{D}^a_{a+b} \text{ und } \sigma^{-1}(i) \notin I \cup (J+a), \\ -T_\sigma e, & \text{falls } i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1}), \sigma_i\sigma \notin \mathcal{D}^a_{a+b} \text{ und } \sigma^{-1}(i) \in I \cup (J+a) \end{cases}$$

für $i \in \underline{a+b-1}$ und $\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}$. Dabei ist $J + a := \{j + a | j \in J\}$.

Beweis. Ist $i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1})$ und $\sigma_i\sigma \notin \mathcal{D}^a_{a+b}$, so liefert Lemma 2.13, dass $\sigma_i\sigma = \sigma\sigma_{\sigma^{-1}(i)}$ ist, und ein reduzierter Ausdruck für $\sigma\sigma_{\sigma^{-1}(i)}$ endet auf $\sigma_{\sigma^{-1}(i)}$. Folglich ist

$$T_iT_\sigma e = T_{\sigma_i\sigma}e = T_{\sigma\sigma_{\sigma^{-1}(i)}}e = T_\sigma T_{\sigma^{-1}(i)}e.$$

Für $\sigma^{-1}(i) \in I \cup (J + n)$ ist $T_{\sigma^{-1}(i)}e = -e$, sonst ist $T_{\sigma^{-1}(i)}e = 0$. □

Definition 2.15. Für $I \subset \underline{a-1}$, $J \subset \underline{b-1}$ und $\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}$ sei

$$L_{I,J}(\sigma) := \mathrm{Des}(\sigma^{-1}) \cup \{i \in \underline{a+b-1} | \sigma_i\sigma \notin \mathcal{D}^a_{a+b} \text{ und } \sigma^{-1}(i) \in I \cup (J+a)\}.$$

Die Menge $L_{I,J}(\sigma)$ enthält also genau die $i \in \underline{a+b-1}$, für die T_i auf $T_\sigma e \in M_{I,J}$ durch $T_iT_\sigma e = -T_\sigma e$ operiert.

Wir wollen $\mathcal{F}(M_{I,J})$ bestimmen, also die einfachen H_{a+b}-Moduln finden, die in einer Kompositionsreihe von $M_{I,J}$ als Faktoren auftreten. Ein zu 1.15 analoger Kniff liefert:

Satz 2.16. Es sei $I \subset \underline{a-1}$ und $J \subset \underline{b-1}$. Dann ist

$$\mathcal{F}(M_{I,J}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}} F_{C(L_{I,J}(\sigma))}.$$

Beweis. Für einen Beweis im Fall $I = J = \emptyset$ siehe [7]. Wir nummerieren $\mathcal{D}^a_{a+b} = \{s_1, ..., s_N\}$ so, dass $\mathrm{l}(s_i) \le \mathrm{l}(s_{i+1})$ ist für alle i. Setzen wir

$$M^{(k)} := \mathrm{span}_K\{T_{s_i}e | i \ge k\} \quad \text{für } 1 \le i \le N,$$

so ist $M^{(k)}$ nach Lemma 2.14 ein H_{a+b}-Modul. Also ist

$$0 =: M^{(N+1)} \subset M^{(N)} \subset ... \subset M^{(1)} = M_{I,J}$$

eine Kette von H_{a+b}-Moduln und damit

$$\mathcal{F}(M_{I,J}) = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}(M^{(k)} / M^{(k+1)}).$$

Wegen $\dim_K(M^{(k)}) = N + 1 - k$ ist $M^{(k)} / M^{(k)}$ eindimensional über K mit Erzeuger $T_{s_k}e + M^{(k+1)}$, also einfach. Es gibt also ein $K_{s_k} \subset \underline{a+b-1}$ mit

$$M^{(k)} / M^{(k+1)} \cong C_{K_{s_k}}.$$

Dieses K_{s_k} ist aber mit Lemma 2.14 einfach zu finden: Es ist für $\sigma = s_k$

$$T_i(T_\sigma e + M^{(k+1)}) = \begin{cases} -T_\sigma e + M^{(k+1)}, & \text{falls } i \in \mathrm{Des}(\sigma^{-1}), \\ 0 + M^{(k+1)}, & \text{falls } i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1}) \text{ und } \sigma_i\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}, \\ -T_\sigma e + M^{(k+1)}, & \text{falls } i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1}), \sigma_i\sigma \notin \mathcal{D}^a_{na+b} \text{ und } \sigma^{-1}(i) \in I \cup (J+a), \\ 0 + M^{(k+1)}, & \text{falls } i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1}), \sigma_i\sigma \notin \mathcal{D}^a_{a+b} \text{ und } \sigma^{-1}(i) \notin I \cup (J+a), \end{cases}$$

also $K_\sigma = L_{I,J}(\sigma)$, und es ist

$$\mathcal{F}(M_{I,J}) = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}(M^{(k)} \diagup M^{(k+1)}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}} F_{C(L_{I,J}(\sigma))}.$$

□

Es ist uns also gelungen, $\mathrm{Ind}_{H_a \otimes H_b}^{H_{a+b}}(C_I \otimes C_J)$ bezüglich der Basis (C_K) von H_{a+b} zu verstehen. Nun wollen wir dasselbe mit den den C_K unter $\mathcal{F}$ entsprechenden quasisymmetrischen Funktionen $F_{C(K)}$ versuchen, also die Koeffizienten λ_K in

$$F_{C(I)} F_{C(J)} = \sum_{K \subset \underline{a+b-1}} \lambda_K F_{C(K)}$$

bestimmen. Wir erinnern uns: F_α war die Summe aller M_β, für die β feiner als α ist, und das Produkt in QSymm war bezüglich der Basis (M_β) durch das recht komplizierte overlapping shuffle product gegeben. Sowohl den Vergleich von Kompositionen bezüglich Feinheit als auch das overlapping shuffle product vermeiden wir, indem wir eine besser handhabbare Darstellung der F_α finden:

Definition 2.17. Für $\pi \in \Sigma_n$ sei

$$S_\pi := \{f\colon \underline{n} \to \mathbb{N} | f(\pi(1)) \leq ... \leq f(\pi(n)),\ \ f(\pi(i)) < f(\pi(i+1)) \text{ für alle } i \in \mathrm{Des}(\pi)\}.$$

Lemma 2.18. Es sei α eine Komposition von $n \in \mathbb{N}$ und $\pi \in \Sigma_n$ eine Permutation mit $C(\pi) := C(\mathrm{Des}(\pi)) = \alpha$. Dann ist

$$F_\alpha = \sum_{f \in S_\pi} x_{f(1)} ... x_{f(n)}.$$

Beweis. (siehe [26, 7.19]) Es ist

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \sum_{\beta \succeq \alpha} M_\beta = \sum_{(b_1,...,b_k)=\beta \succeq \alpha} \ \sum_{l_1 < ... < l_k} X_{l_1}^{b_1} ... X_{l_k}^{b_k} \\ &= \sum_{(b_1,...,b_k)=\beta \succeq \alpha} \ \sum_{\substack{r_1 \leq ... \leq r_n \\ r_i < r_{i+1} \Leftrightarrow i \in D(\beta)}} X_{r_1} ... X_{r_n}, \end{aligned}$$

denn es ist $D(\beta) = \{b_1, b_1 + b_2, ..., b_1 + ... + b_k\}$. Da $\alpha \preceq \beta$ genau dann gilt, wenn $\mathrm{Des}(\pi) =$

$D(\alpha) \subset D(\beta)$ ist, ist also

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \sum_{\mathrm{Des}(\pi) \subset D(\beta)} \sum_{\substack{f\colon \{1,...,n\} \to \mathbb{N}, f(1) \leq ... \leq f(n) \\ f(i) < f(i+1) \Leftrightarrow i \in D(\beta)}} X_{f(1)} ... X_{f(n)} \\ &= \sum_{\substack{f\colon \{1,...,n\}, f(1) \leq ... \leq f(n) \\ i \in \mathrm{Des}(\pi) \Rightarrow f(i) < f(i+1)}} X_{f(1)} ... X_{f(n)} \\ &= \sum_{\substack{f\colon \{1,...,n\} \to \mathbb{N}, f(\pi(1)) \leq ... \leq f(\pi(n)) \\ i \in \mathrm{Des}(\pi) \Rightarrow f(\pi(i)) < f(\pi(i+1))}} X_{f(1)} ... X_{f(n)} \\ &= \sum_{f \in S_\pi} X_{f(1)} ... X_{f(n)}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.19. Jedes F_α lässt sich wie in 2.18 darstellen: Die Abbildung C ist eine Bijektion, es gibt also ein $I \subset \underline{n-1}$ mit $C(I) = \alpha$. Um ein $\pi \in \Sigma_n$ mit $\mathrm{Des}(\pi) = I$ zu finden, zerlegen wir I in größtmögliche Intervalle: Es sei

$$I = \{i_1, i_1 + 1, ..., i_1 + n_1 < i_2, i_2 + 1, ..., i_{k-1} + n_{k-1} < i_k, i_k + 1, ..., i_k + n_k\}$$

mit $i_l + n_l + 1 < i_{l+1}$ für $1 \leq l < k$. Für $I = \{1, 3, 4\}$ beispielsweise ist $i_1 = 1, n_1 = 0$ und $i_2 = 3, n_2 = 1$.
Für alle $s \notin I$, die nicht direkt an ein Intervallende anschließen, also $s \neq i_l + n_l + 1$, setzen wir $\pi(s) := s$.
Auf den einzelnen Intervallen (und ihren kleinsten rechts nicht enthaltenen Punkten) soll π die Ordnung umkehren, um die gewünschte Abstiegsmenge zu erhalten: Für $i \leq l \leq k$ setze

$$(\pi(i_l), ..., \pi(i_l + n_l + 1)) := (i_l + n_l + 1, i_l + n_l, ..., i_l).$$

Dann ist $\mathrm{Des}(\pi) = I$.

In unserer neuen Notation ist für $\sigma \in \Sigma_n, \pi \in \Sigma_m$

$$\begin{aligned} F_{C(\sigma)} F_{C(\tilde{\pi})} &= \sum_{f \in S_\sigma} \sum_{g \in S_\pi} X_{f(1)} ... X_{f(n)} X_{g(1)} ... X_{g(m)} \\ &= \sum_{(f,g) \in S_\sigma \times S_\pi} X_{f(1)} ... X_{f(n)} X_{g(1)} ... X_{g(m)}, \end{aligned}$$

es ist also nun die Frage, wie sich Tupel $(f, g) \in S_\sigma \times S_\pi$ als Elemente eines S_ω auffassen lassen.

Lemma 2.20. Die Menge aller Funktionen $f\colon \underline{n} \to \mathbb{N}$ ist die disjunkte Vereinigung der S_π mit $\pi \in \Sigma_n$:

$$\{f\colon \underline{n} \to \mathbb{N}\} = \bigsqcup_{\pi \in \Sigma_n} S_\pi$$

Beweis. (siehe [26, 7.19]) Betrachte eine Abbildung $f\colon \underline{n} \to \mathbb{N}$ mit Bildmenge $f(\underline{n}) =: \{w_1 < ... < w_s\}$. Das Urbild von w_i unter f sei

$$f^{-1}(\{w_i\}) =: B^{(i)} =: \{b_1^{(i)} < ... < b_{n_i}^{(i)}\}.$$

Falls $f \in S_\pi$ ist, muss wegen $f(\pi(1)) \leq ... \leq f(\pi(n))$

$$\begin{aligned}
\pi(\{1, ..., n_1\}) &= B^{(1)}, \\
\pi(\{n_1 + 1, ..., n_1 + n_2\}) &= B^{(2)}, \\
&\quad ... \\
\pi(\{n_1 + ... + n_{s-1} + 1, ..., n\}) &= B^{(s)}
\end{aligned}$$

sein. Da f auf $B^{(i)}$ konstant ist, muss π auf obigen Mengen ordnungserhaltend sein, denn $k \in \mathrm{Des}(\pi)$ impliziert $f(\pi(k)) < f(\pi(k+1))$. Also ist

$$\mathrm{Des}(\pi) \subset \{n_1, n_1 + n_2, ..., n_1 + ... + n_{s-1}\}.$$

Dadurch ist π eindeutig festgelegt: es muss

$$(\pi(n_i + 1), ..., \pi(n_i + n_{i+1})) = (b_1^{(i)}, ..., b_{n_i}^{(i)})$$

sein, und diese Blöcke müssen nach i geordnet in $(\pi(1), ..., \pi(n))$ auftreten, da $f(B^{(i)}) = w_i < w_{i+1} = f(B^{(i)})$ ist. Es ist also

$$(\pi(1), ...\pi(n)) = (b_1^{(1)}, ..., b_{n_1}^{(1)}, b_1^{(2)}, ..., b_{n_{s-1}}^{(s-1)}, b_1^{(s)}, ..., b_{n_s}^{(s)}),$$

und die im Lemma behauptete Zerlegung ist disjunkt.
Andererseits gilt für die so definierte Permutation tatsächlich, dass $f \in S_\pi$ ist, dies zeigt die Behauptung. $\square$

Definition 2.21. Für $u \in \Sigma_a, v \in \Sigma_b$ definiere $u \times v \in \Sigma_{a+b}$ durch

$$u \times v(s) := \begin{cases} u(s), & \text{falls } s \leq a, \\ a + v(s-a), & \text{falls } s > a. \end{cases}$$

Lemma 2.22. Es seien $u \in \Sigma_a$, $v \in \Sigma_b$. Dann ist

$$\Phi \colon S_u \times S_v \to \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a} S_{(u \times v)\sigma^{-1}}, \quad \Phi(f,g)(i) := \begin{cases} f(i), & \text{falls } 1 \leq i \leq a, \\ g(i-a), & \text{falls } a < i \leq a+b \end{cases}$$

eine Bijektion.

Beweis. Es sei $f \in S_u$ und $g \in S_v$. Nach Lemma 2.20 gibt es ein $\pi \in \Sigma_{a+b}$ mit $\Phi(f,g) \in S_\pi$. Wir zeigen zunächst, dass das Bild von Φ in der im Lemma angegebenen Bildmenge enthalten ist: Dies bedeutet $\pi = (u \times v)\sigma^{-1}$ für ein $\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a$, also

$$\pi^{-1}(u \times v) \in \mathcal{D}_{a+b}^a.$$

Angenommen, es gibt ein $i < a$ mit

$$\pi^{-1}(u \times v)(i+1) \quad = \quad \pi^{-1}u(i+1) < \pi^{-1}u(i) = \pi^{-1}(u \times v)(i). \tag{1}$$

Dann ist wegen $\Phi(f,g) \in S_\pi$

$$f(u(i+1)) = \Phi(f,g)(\pi(\pi^{-1}u(i+1))) \leq \Phi(f,g)(\pi(\pi^{-1}u(i))) = f(u(i)),$$

aber wegen $f \in S_u$ ist auch $f(u(i)) \le f(u(i+1))$, also

$$f(u(i+1)) \quad = \quad \Phi(f,g)(\pi(\pi^{-1}u(i+1))) = \Phi(f,g)(\pi(\pi^{-1}u(i))) = f(u(i)). \qquad (2)$$

Somit kann i kein Abstieg von u sein, also ist $u(i) < u(i+1)$, also $\pi\pi^{-1}u(i) < \pi\pi^{-1}u(i+1)$. Dann muss es aber wegen (1) ein $k \in \{\pi^{-1}u(i+1) < ... < \pi^{-1}u(i) - 1\}$ geben, das ein Abstieg von π ist, im Widerspruch zu (2).
Analog sieht man, dass es kein $i \in \mathrm{Des}(\pi^{-1}(u \times v))$ mit $i > a$ geben kann, also ist $\pi^{-1}(u \times v) \in \mathcal{D}^a_{a+b}$.
Es ist klar, dass Φ injektiv ist, zu zeigen bleibt die Surjektivität. Es sei $h \in S_{(u\times v)\sigma^{-1}}$ mit $\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}$. Setze

$$f := h_{|\{1,...,n\}} \quad \text{und} \quad g := h_{|\{n+1,...,n+m\}} \circ (i \mapsto i+n).$$

Für $1 \le i < a$ ist $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, also auch

$$f(u(i)) = h((u \times v)\sigma^{-1}\sigma(i)) \le h((u \times v)\sigma^{-1}\sigma(i+1)) = f(u(i+1)),$$

die erste Bedingung für $f \in S_u$ ist erfüllt. Ist $i \in \mathrm{Des}(u)$, so ist

$$(u \times v)\sigma^{-1}\sigma(i) > (u \times v)\sigma^{-1}\sigma(i+1).$$

Wegen $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ gibt es also ein $j \in \{\sigma(i), ..., \sigma(i+1) - 1\}$ mit $j \in \mathrm{Des}((u \times v)\sigma^{-1})$. Damit ist

$$\begin{aligned} f(u(i)) &= h((u \times v)\sigma^{-1}\sigma(i)) \\ &\le ... \\ &\le h((u \times v)\sigma^{-1}(j)) \\ &< h((u \times v)(\sigma^{-1}(j+1))) \\ &\le ... \\ &\le h((u \times v)\sigma^{-1}\sigma(i+1)) \\ &= f(u(i+1)), \end{aligned}$$

also ist $f \in S_u$. Ebenso sieht man, dass $g \in S_v$ ist. Da $\Phi(f,g) = h$ ist, ist gezeigt, dass Φ surjektiv ist. □

Nun können wir endlich eine Formel für die Multiplikation der quasi-Ribbon-Funktionen angeben:

Korollar 2.23. Es sei $u \in \Sigma_a$ und $v \in \Sigma_b$. Dann ist

$$F_{C(u)}F_{C(v)} = \sum_{\sigma \in D^a_{a+b}} F_{C((u\times v)\sigma^{-1}))}.$$

Beweis. Mit Lemma 2.18 und Lemma 2.22 ist

$$\begin{aligned} F_{C(u)}F_{C(v)} &= \sum_{f\in S_u}\sum_{g \in S_v} X_{f(1)}...X_{f(a)}X_{g(1)}...X_{g(b)} \\ &= \sum_{(f,g)\in S_u \times S_v} X_{f(1)}...X_{f(n)}X_{g(1)}...X_{g(m)} \\ &= \sum_{\sigma \in D^a_{a+b}} \sum_{\Phi(f,g)\in S_{(u\times v)\sigma^{-1}}} X_{f(1)}...X_{f(a)}X_{g(1)}...X_{g(b)}, \end{aligned}$$

und da Φ bijektiv ist und $X_{\Phi(f,g)(1)}...X_{\Phi(f,g)(n+m)} = X_{f(1)}...X_{f(n)}X_{g(1)}...X_{g(m)}$ gilt, folgt die Behauptung. □

Wir wissen nun also, dass für Permutationen $u \in \Sigma_a, v \in \Sigma_b$ nach Satz 2.16

$$\mathcal{F}(\mathrm{Ind}_{H_a \otimes H_b}^{H_{a+b}}(C_{\mathrm{Des}(u)} \otimes C_{\mathrm{Des}(v)})) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a} F_{C(L_{\mathrm{Des}(u),\mathrm{Des}(v)}(\sigma))}$$

ist und nach Korollar 2.23

$$\mathcal{F}(C_{\mathrm{Des}(u)}) \cdot \mathcal{F}(C_{\mathrm{Des}(v)}) = F_{C(u)} F_{C(v)} = \sum_{\sigma \in D_{a+b}^a} F_{C((u \times v)\sigma^{-1}))}.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $L_{\mathrm{Des}(u),\mathrm{Des}(v)}(\sigma) = \mathrm{Des}(u \times v)\sigma^{-1}$ ist. Diese leider etwas technische Aufgabe nimmt den Rest dieses Abschnittes in Anspruch.

Lemma 2.24. Für $\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a$ und $i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1})$ ist

$$\sigma^{-1}(i+1) = \sigma^{-1}(i) + 1$$

oder

$$\sigma^{-1}(i) \leq a \text{ und } \sigma^{-1}(i+1) > a.$$

Beweis. Wegen $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(i+1)$ gibt es $j, k \in \underline{a+b}$ mit $j < k$ und $\sigma(j) = i < i+1 = \sigma(k)$. Falls $k \neq j+1$ ist, lassen sich drei Fälle unterscheiden:
Für $j = a$ ist offensichtlich $j \leq a$ und $a < k$.
Ist $j < a$, so ist $\sigma(j) < \sigma(j+1) < ... < \sigma(a)$ und $\sigma(j+1) \neq \sigma(k)$, also muss $k > a$ sein wegen $\sigma(k) = \sigma(j) + 1$.
Ist $j > a$, so folgt analog, dass $k \leq a$ sein muss, dann ist aber $k < j$, ein Widerspruch. □

Lemma 2.25. Es seien $u \in \Sigma_a, v \in \Sigma_b$ mit $\mathrm{Des}(u) = I, \mathrm{Des}(v) = J + a$ und $\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a$. Dann ist

$$\mathrm{Des}((u \times v)\sigma^{-1}) \subset L_{I,J}(\sigma^{-1}).$$

Beweis. Angenommen, es ist $i \in \mathrm{Des}((u \times v)\sigma^{-1})$ und $i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1})$. Nach Lemma 2.24 ist

$$\sigma^{-1}(i+1) = \sigma^{-1}(i) + 1 \qquad \text{oder} \qquad \sigma^{-1}(i) \leq a \text{ und } \sigma^{-1}(i+1) > a,$$

letzteres ist nicht möglich wegen $u \times v(\underline{a}) = \underline{a}$. Damit ist aus demselben Grund $\sigma^{-1}(i) \neq a$. Für $\sigma^{-1}(i) \leq a$ ergibt sich aus $i \in \mathrm{Des}((u \times v)\sigma^{-1})$, dass $\sigma^{-1}(i) \in I$ ist, für $\sigma^{-1}(i) > a$ folgt $\sigma^{-1}(i) \in J + a$.
Weiter zeigt eine einfache Rechnung, dass $\sigma^{-1}(i) \in \mathrm{Des}(\sigma_i\sigma)$ ist, wegen $\sigma(i)^{-1} \neq a$ ist also $\sigma_i\sigma \notin \mathcal{D}_{a+b}^a$. Es ist also $i \in L_{I,J}(\sigma^{-1})$. □

Lemma 2.26. Es seien $u \in \Sigma_a, v \in \Sigma_b$ und $\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a$. Dann ist

$$\mathrm{Des}(\sigma^{-1}) \subset \mathrm{Des}((u \times v)\sigma^{-1}).$$

Beweis. Falls $\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(i+1)$ ist, gibt es $j, k \in \{1, ..., a+b\}$ mit $j < k$ und $\sigma(k) = i < i+1 = \sigma(j)$. Wegen $\sigma \in \mathcal{D}_{a+b}^a$ ist dann $j \leq a < k$ und damit

$$(u \times v)\sigma^{-1}(i) = a + v(k-a) > a \geq u(j) = (u \times v)\sigma^{-1}(i+1).$$

□

Lemma 2.27. Es sei $\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}$ und $i \in \underline{a+b-1}$. Gilt $\sigma^{-1}(i) < a$ und $\sigma^{-1}(i+1) > a$, so ist $\sigma_i\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}$.

Beweis. Nach Lemma 2.12 ist $\mathrm{Des}(\sigma_i\sigma) \subset \{a, \sigma^{-1}(i)\}$. Nun ist $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(i) + 1 \leq a$, also

$$i = \sigma(\sigma^{-1}(i)) < \sigma(\sigma^{-1}(i) + 1).$$

Da $\sigma^{-1}(i) < a$ und $\sigma^{-1}(i+1) > a$ ist, also insbesondere $\sigma^{-1}(i) + 1 \neq \sigma^{-1}(i+1)$, ist also $\sigma(\sigma^{-1}(i) + 1) > i + 1$ und damit

$$\sigma_i\sigma\sigma^{-1}(i) = i + 1 < \sigma(\sigma^{-1}(i) + 1) = \sigma_i\sigma(\sigma^{-1}(i) + 1),$$

also $\sigma^{-1}(i) \notin \mathrm{Des}(\sigma_i\sigma)$ und $\sigma_i\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}$. □

Lemma 2.28. Es seien $u \in \Sigma_a, v \in \Sigma_b$ mit $\mathrm{Des}(u) = I, \mathrm{Des}(v) = J + a$ und $\sigma \in \mathcal{D}^a_{a+b}$. Dann ist

$$L_{I,J}(\sigma^{-1}) = \mathrm{Des}((u \times v)\sigma^{-1}).$$

Beweis. Wegen Lemma 2.25 und Lemma 2.26 ist nur noch zu zeigen, dass alle $i \in \underline{a+b-1}$ mit $\sigma_i\sigma \notin \mathcal{D}^a_{a+b}$ und $\sigma^{-1}(i) \in I \cup (J + a)$ in $\mathrm{Des}((u \times v)\sigma^{-1})$ liegen.
Ist ein solches i vorgegeben, so ist $i \notin \mathrm{Des}(\sigma^{-1})$ wegen $\sigma_i\sigma \notin \mathcal{D}^a_{a+b}$.
Mit Lemma 2.24 ist also $\sigma^{-1}(i+1) = \sigma^{-1}(i)+1$, oder es gilt $\sigma^{-1}(i) \leq a$ und $\sigma^{-1}(i+1) > a$.
Da $\sigma^{-1}(i) \in I \cup (J + a)$, also insbesondere $\sigma^{-1}(i) \neq a$ ist, liefert Lemma 2.27, dass

$$\sigma^{-1}(i + 1) = \sigma^{-1}(i) + 1$$

sein muss. Wegen $\sigma^{-1}(i) \in I \cup (J + a)$ ist also $i \in \mathrm{Des}((u \times v)\sigma^{-1})$. □

Korollar 2.29. $(\mathcal{G}_0(H), \mathrm{Ind}_\mathcal{G}, \eta_\mathcal{G})$ ist eine graduierte Algebra und $\mathcal{F}\colon \mathcal{G}_0(H) \to \mathrm{QSymm}$ ist ein Isomorphismus von graduierten unitären Algebren.

Beweis. Satz 2.16, Korollar 2.23 und Lemma 2.28 liefern

$$\mathcal{F}(\mathrm{Ind}_\mathcal{G}(C_I \otimes_\mathbb{Z} C_J)) = \mathcal{F}(C_I) \cdot \mathcal{F}(C_J).$$

Da $\mathrm{Ind}_\mathcal{G}$ linear ist und die C_I eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{G}_0(H)$ bilden, ist $\mathcal{G}_0(H)$ eine zu QSymm isomorphe Algebra.
Weil $\mathcal{F}(\eta_\mathcal{G}(1)) = \mathcal{F}(K) = ()$ das Einselement in QSymm ist, ist $\mathcal{G}_0(H)$ unitär und $\mathcal{F}$ erhält die Eins. □

2.3 $\mathcal{F}$ erhält die Komultiplikation

Wir haben bereits versprochen, dass $\mathcal{G}_0(H)$ nicht nur als Algebra, sondern sogar als Bialgebra mit dem Restriktionskoprodukt isomorph zu QSymm ist, dies zeigen wir nun. Dazu untersuchen wir zunächst, wie sich die einfachen H_n-Moduln unter Restriktion verhalten:

Lemma 2.30. Für $n = a + b$ und $I = \{i_1 < ... < i_k\} \subset \underline{a+b-1}$ ist

$$\mathrm{Res}^{H_n}_{H_a \otimes H_b}(C_I) \cong C_{I_a} \otimes_K C_{I_b}$$

mit $I_a = \{i_j | i_j < a\}$ und $I_b = \{i_j - a | i_j > a\}$.

Beweis. Für $i < a$ ist $i \in I$ genau dann, wenn $i \in I_a$ ist, ebenso ist $a < i \in I$ genau dann, wenn $i - a \in I_b$ ist. Da die Wirkung von T_a auf den Erzeuger e_I von C_I für die $H_a \otimes H_b$-Modulstruktur von C_I keine Rolle spielt, ist die Abbildung

$$C_I \to C_{I_a} \otimes C_{I_b}, \quad e_I \mapsto e_{I_a} \otimes e_{I_b}$$

ein Isomorphismus von $H_a \otimes H_b$-Moduln. □

Erfreulicherweise ist das Koprodukt in QSymm auch in der Basis (F_α) einfacher als das Produkt:

Satz 2.31. Es sei α eine Komposition von n mit $D(\alpha) = I = \{i_1 < ... < i_k\} \subset \underline{n-1}$, dann ist mit der Definition von I_a bzw. I_b aus Lemma 2.30

$$\Delta(F_{C(I)}) = \sum_{a+b=n} F_{C(I_a)} \otimes F_{C(I_b)}.$$

Beweis. Für $a + b = n$ und $i_s = a$ ist

$$I_a = \{i_1 < ... < i_{s-1}\} \quad \text{und} \quad I_b = \{i_{s+1} - a < ... < i_k - a\},$$

also

$$\begin{aligned} C(I_a) &= (i_1, i_2 - i_1, ..., a - i_{s-1}) = (i_1, i_2 - i_1 ..., i_s - i_{s-1}) \\ \text{und} \quad C(I_b) &= (i_{s+1} - a, i_{s+1} - i_{s+1}, ..., n - i_k) = (i_{s+1} - i_s, i_{s+2} - i_{s+1} ..., n - i_k). \end{aligned}$$

Ist andererseits $i_s < a < i_{s+1}$, so ist

$$I_a = \{i_1 < ... < i_s\} \quad \text{und} \quad I_b = \{i_{s+1} - a < ... < i_k - a\},$$

also

$$C(I_a) = (i_1, i_2 - i_1, ..., a - i_s) \quad \text{und} \quad C(I_b) = (i_{s+1} - a, i_{s+2} - i_{s+1}, ..., n - i_k).$$

Folglich ist mit $\beta * \gamma := (b_1, ..., b_{\mathrm{l}(\beta)}, c_1, ..., c_{\mathrm{l}(\gamma)})$ für Kompositionen β, γ

$$\begin{aligned} \sum_{a+b=n} F_{C(I_a)} \otimes F_{C(I_b)} &= \sum_{\substack{a+b=n \\ a=i_s \text{ für ein } s}} F_{(i_1, i_2-i_1, ..., i_s - i_{s-1})} \otimes F_{(i_{s+1}-i_s, i_{s+2}-i_{s+1}, ..., n-i_k)} \\ &\quad + \sum_{\substack{a+b=n \\ i_{s-1} < a < i_s \text{ für ein } s}} F_{(i_1, i_2-i_1, ..., a-i_s)} \otimes F_{(i_{s+1}-a, i_{s+2}-i_{s+1}, ..., n-i_k)} \\ &= \sum_{\beta,\gamma:\beta*\gamma=I} F_\beta \otimes F_\gamma + \sum_{\beta,\gamma:(\beta_1,...,\beta_{\mathrm{l}(\beta)}+\gamma_1,...,\gamma_{\mathrm{l}(\gamma)})=I} F_\beta \otimes F_\gamma \\ &= \sum_{\beta,\gamma:\beta*\gamma=I} F_\beta \otimes F_\gamma + \sum_{\beta,\gamma:\beta*\gamma\succ I, \mathrm{l}(\beta)+\mathrm{l}(\gamma)=\mathrm{l}(I)+1} F_\beta \otimes F_\gamma \\ &= \sum_{\beta,\gamma:\beta*\gamma\succeq I, \mathrm{l}(\beta)+\mathrm{l}(\gamma)\leq \mathrm{l}(I)+1} F_\beta \otimes F_\gamma \\ &= \sum_{\beta,\gamma:\beta*\gamma\succeq I, \mathrm{l}(\beta)+\mathrm{l}(\gamma)\leq \mathrm{l}(I)+1} \sum_{\substack{\tilde\beta\succeq\beta \\ \tilde\gamma\succeq\gamma}} M_{\tilde\beta} \otimes M_{\tilde\gamma}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\Delta F_\alpha = \sum_{\beta \succeq \alpha} \Delta M_\beta = \sum_{\beta \succeq \alpha} \sum_{s=0}^{\mathrm{l}(\beta)} (b_1, ..., b_s) \otimes (b_{s+1}, ..., b_{\mathrm{l}(\beta)}) = \sum_{\beta_1 * \beta_2 \succeq \alpha} M_{\beta_1} \otimes M_{\beta_2}.$$

Ist aber $\beta_1 * \beta_2 \succeq \alpha$, so ist entweder $\beta_1 \succeq \alpha_1$ und $\beta_2 \succeq \alpha_1$ für Kompositionen α_1, α_2 mit $\alpha_1 * \alpha_2 = \alpha$, oder es ist $\beta_1 \succeq (a_1, ..., a_{s-1}, r)$ und $\beta_2 \succeq (a_s - r, a_{s+1}, ..., a_{\mathrm{l}(\alpha)})$ für ein $s \in \{1, ..., \mathrm{l}(\alpha)\}$ und ein $r \in \{1, ..., a_{s-1}\}$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Wir erinnern uns an die Abbildung $\epsilon_\mathcal{G} \colon \mathcal{G}_0(H) \to \mathbb{Z}$ aus 2.9: $\epsilon_\mathcal{G}$ war die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, die $K \in \mathcal{G}_0(H_0)$ auf 1 und alle Elemente in höheren Graden auf 0 abbildet. Da aber $K = C_{()}$ und $F_{()} = 1 \in \mathrm{QSymm}$ ist, entspricht $\epsilon_\mathcal{G}$ gerade der Koeins ϵ_Q unter $\mathcal{F}$. Wir fassen zusammen:

Satz 2.32. Die Abbildung $\mathcal{F} \colon \mathcal{G}_0(H) \to \mathrm{QSymm}$ ist ein Isomorphismus von graduierten Bialgebren. $\square$

Nach Bemerkung 1.21 gilt sogar: Es gibt es genau eine Antipode auf $\mathcal{G}_0(H)$, und $\mathcal{F}$ ist ein Isomorphismus von Hopfalgebren.

3 Die Dualität zwischen $\mathcal{G}_0(H)$ und $\mathcal{K}_0(H)$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, $\mathcal{K}_0(H)$ als die zu $\mathcal{G}_0(H)$ duale Bialgebra zu identifizieren. Dazu werden wir eine nichtausgeartete Paarung zwischen den abelschen Gruppen $\mathcal{G}_0(H)$ und $\mathcal{K}_0(H)$ konstruieren. Dann definieren wir - wieder durch Induktion und Restriktion von Moduln - zwei Abbildungen

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}} \colon \mathcal{K}_0(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(H) \to \mathcal{K}_0(H), \quad \mathrm{Res}_{\mathcal{K}} \colon \mathcal{K}_0(H) \to \mathcal{K}_0(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(H).$$

Das graduiert Duale von $\mathcal{G}_0(H)$ ist nach Lemma 1.35 wieder eine Bialgebra. In 3.3 werden wir mithilfe obiger Paarung zeigen, dass $\mathcal{K}_0(H)$ eine zum graduiert Dualen von $\mathcal{G}_0(H)$ isomorphe Bialgebra ist.

3.1 Eine Paarung zwischen $\mathcal{G}_0(H)$ und $\mathcal{K}_0(H)$

Nun definieren wir die Paarung, mit deren Hilfe wir später die Dualität zwischen $\mathcal{K}_0(H)$ und $\mathcal{G}_0(H)$ beweisen.
Wir erinnern noch einmal daran, dass wir ausschließlich endlich erzeugte Moduln betrachten und diese kurz als Moduln bezeichnen, sowie daran, dass wir für die durch einen H_n-Modul M in $\mathcal{G}_0(H)$ oder $\mathcal{K}_0(H)$ definierte Äquivalenzklasse ebenfalls nur M schreiben.

Lemma 3.1. Es sei A eine K-Algebra mit $\dim_K(A) < \infty$. Dann ist die Abbildung

$$\tilde{\Psi} \colon \mathcal{K}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}(A) \to \mathbb{Z}, \quad M \otimes N \mapsto \dim_K \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

wohldefiniert und linear.

Beweis. Es seien $M, \tilde{M}$ projektive A-Moduln und

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N_2 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln.
Es ist klar, dass $\dim_K \mathrm{Hom}_A(M \oplus \tilde{M}, N) = \dim_K \mathrm{Hom}(M, N) + \dim_K \mathrm{Hom}_A(\tilde{M}, N)$ ist.
Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\dim_K \mathrm{Hom}_A(M, N) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(M, N_1) + \dim_K \mathrm{Hom}_A(M, N_2)$$

gilt.
Das Bild $f_*\mathrm{Hom}_A(M, N_1)$ der induzierten Abbildung f_* ist ein Untermodul von $\mathrm{Hom}_A(M, N)$.
Die durch g induzierte Abbildung

$$g_* \colon (\mathrm{Hom}_A(M, N))/(f_*\mathrm{Hom}_A(M, N_1)) \to \mathrm{Hom}_A(M, N_2)$$

ist wegen $gf = 0$ wohldefiniert. Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ mit $g_*\varphi = g\varphi = 0$, so ist $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathrm{Im}f$, also ist $f^{-1}\varphi$ wohldefiniert, und es ist $\varphi = f_*(f^{-1}\varphi) \in f_*\mathrm{Hom}_A(M, N_1)$. Folglich ist g_* injektiv.
Ist $\phi \in \mathrm{Hom}_A(M, N_2)$ gegeben, so finden wir aufgrund der Projektivität von M ein $\tilde{\phi} \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ mit $g\tilde{\phi} = \phi$, also ist g_* auch surjektiv.
Damit erhalten wir wegen der Injektivität von f

$$\begin{aligned} \dim_K \mathrm{Hom}_A(M, N_2) &= \dim_K \mathrm{Hom}_A(M, N) - \dim_K f_*\mathrm{Hom}_A(M, N_1) \\ &= \dim_K \mathrm{Hom}_A(M, N) - \dim_K \mathrm{Hom}_A(M, N_1). \end{aligned}$$

□

Definition 3.2. Mit Lemma 3.1 erhalten wir eine graduierte Paarung

$$\hat{\Psi}\colon \mathcal{K}(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}(H) \to \mathbb{Z},$$

indem wir $\hat{\Psi}(x \otimes y) = 0$ setzen für $x \in \mathcal{K}(H_a), y \in \mathcal{G}(H_b)$ mit $a \neq b$.

Bemerkung 3.3. (i) Ist R ein linksartinscher Ring und M ein endlich erzeugbarer R-Modul, so ist M isomorph zu einer (bis auf Isomorphie und Umordnung eindeutig bestimmten) endlichen direkten Summe unzerlegbarer R-Moduln $M_1, ..., M_k$ [15, S.230]. Ist M projektiv, so sind offensichtlich auch alle M_i projektiv. Folglich wird $\mathcal{K}_0(R)$ von den unzerlegbaren projektiven R-Moduln erzeugt.
Betrachte die in Definition 1.1 definierte Untergruppe U der freien abelschen Gruppe F auf einem Skelett projektiver R-Moduln. Bezeichne $s(M)$ das zu M isomorphe Element des gewählten Skelettes. Da kurze exakte Sequenzen projektiver Moduln spalten, ist U erzeugt von Elementen $s(A \oplus B) - s(A) - s(B)$.
Ist nun $P = Q$ in $\mathcal{K}_0(R)$, liegt also $s(P) - s(Q)$ in U, so gibt es demnach projektive R-Moduln A_i, B_i, C_i, D_i, so dass

$$s(P)+\sum_i s(A_i)+\sum_i s(B_i)+\sum_i s(C_i \oplus D_i) = s(Q)+\sum_i s(A_i \oplus B_i)+\sum_i s(C_i)+\sum_i s(D_i)$$

ist. Dann ist aber auch

$$P \oplus \bigoplus_i A_i \oplus \bigoplus_i B_i \oplus \bigoplus_i (C_i \oplus D_i) \cong Q \oplus \bigoplus_i (A_i \oplus B_i) \oplus \bigoplus_i C_i \oplus \bigoplus_i D_i,$$

und wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung in unzerlegbare projektive Moduln ist $P \cong Q$.
Insbesondere gibt es keine nichttrivialen Relationen in $\mathcal{K}_0(R)$ zwischen nichtisomorphen unzerlegbaren projektiven Moduln, und damit ist $\mathcal{K}_0(R)$ die freie abelsche Gruppe auf den Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver R-Moduln.

(ii) Es gilt:

$$P \mapsto P/\mathrm{rad}P$$

induziert eine Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver R-Moduln und der Menge der Isomorphieklassen einfacher R-Moduln [15, S.237].

Satz 3.4. Die Paarung $\hat{\Psi}$ ist nichtausgeartet, und für jeden einfachen H_n-Modul $N \neq 0$ gibt es einen projektiven H_n-Moduln P mit

$$\hat{\Psi}(P, N) = 1.$$

Beweis. Wegen $\hat{\Psi}(M, M) \neq 0$ für alle projektiven H_n-Moduln $M \neq 0$ ist klar, dass $\hat{\Psi}$ in der ersten Komponente nicht ausgeartet ist.
Es sei $N_1, ..., N_l$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher H_n-Moduln, es seien weiter $P_1, ..., P_l$ unzerlegbare projektive H_n-Moduln mit $P_i/\mathrm{rad}P_i = N_i$. Da für $\phi\colon P_i \to N_j$ gilt, dass $\phi(\mathrm{rad}P_i) \subset \mathrm{rad}N_j = 0$ ist, ergibt sich

$$\mathrm{Hom}_{H_n}(P_i, N_j) \cong \mathrm{Hom}_{H_n}(P_i/\mathrm{rad}P_i, N_j) \cong \mathrm{Hom}_{H_n}(N_i, N_j) \cong \begin{cases} K, & i = j \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

also $\hat{\Psi}(P_i, N_j) = \delta_{i,j}$. Da $(N_1, ..., N_l)$ eine Basis von $\mathcal{G}_0(H)$ ist, ist $\hat{\Psi}$ nicht ausgeartet. $\square$

Korollar 3.5. Wir erhalten einen Isomorphismus abelscher Gruppen

$$\Psi\colon \mathcal{K}(H) \to \mathcal{G}(H)', \quad M \mapsto \hat{\Psi}(M, -).$$

3.2 Induktion und Restriktion in $\mathcal{K}_0(H)$

Nachdem wir die Dualität der abelschen Gruppen $\mathcal{G}(H)$ und $\mathcal{K}(H)$ auf ein solides Fundament gestellt haben, konstruieren wir nun die Abbildungen, die $\mathcal{K}(H)$ zu einer Bialgebra machen. Wie für $\mathcal{G}_0(H)$ ist die Definition des Produktes über die Induktion von Moduln problemlos möglich:

Lemma 3.6. Es seien P, Q endlich erzeugte projektive H_a- bzw. H_b-Moduln. Dann ist auch $\mathrm{Ind}_{H_a \otimes H_b}^{H_{a+b}}(P \otimes Q)$ projektiv und endlich erzeugt.

Beweis. Dass der induzierte Modul wieder endlich erzeugt ist, haben wir uns schon bei der Definition von $\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}}$ überlegt. Da H_{a+b} ein freier $H_a \otimes H_b$-Modul ist, ist mit P und Q auch $H_{a+b} \otimes_{H_a \otimes H_b} (P \otimes Q)$ projektiv: Gilt $P \oplus \tilde{P} \cong H_a^r$ und $Q \oplus \tilde{Q} \cong H_b^s$, so ist

$$\begin{aligned} H_{a+b} \otimes_{H_a \otimes H_b} ((P \oplus \tilde{P}) \otimes (Q \oplus \tilde{Q})) &\cong H_{a+b} \otimes_{H_a \otimes H_b} (H_a^r \otimes H_b^s) \\ &\cong H_{a+b} \otimes_{H_a \otimes H_b} (H_a \otimes H_b)^{rs} \\ &\cong H_{a+b}^{rs} \end{aligned}$$

als H_{a+b}-Modul, da $H_a^r \otimes H_b^s \cong (H_a \otimes H_b)^{rs}$ als $H_a \otimes H_b$-Modul ist. Der erste Term enthält $H_{a+b} \otimes_{H_a \otimes H_b} (P \otimes Q)$ als direkten Summanden. □

Wir können also definieren:

Definition 3.7. Die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}$ sei gegeben durch

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}\colon \mathcal{K}_0(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(H) \to \mathcal{K}_0(H), M \otimes_{\mathbb{Z}} N \mapsto \mathrm{Ind}_{H_a \otimes H_b}^{H_{a+b}}(M \otimes_K N).$$

Um unsere Kandidatin für die Komultiplikation zu definieren, benötigen wir wie für $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}$ eine Abbildung $\mathcal{K}_0(H \otimes_K H) \to \mathcal{K}_0(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(H)$. Das folgende Lemma werden wir bei der Konstruktion dieser Abbildung nutzen. Eine ähnliche Aussage findet sich in [6, S.252].

Lemma 3.8. Es seien A, B endlichdimensionale K-Algebren, M und $\tilde{M}$ zwei A-Moduln, N und $\tilde{N}$ zwei B-Moduln. Dann ist

$$\mathrm{Hom}_A(M, \tilde{M}) \otimes_K \mathrm{Hom}_B(N, \tilde{N}) \cong \mathrm{Hom}_{A \otimes_K B}(M \otimes_K N, \tilde{M} \otimes_K \tilde{N}).$$

Beweis. Es ist klar, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_A((M, \tilde{M}) \otimes \mathrm{Hom}_B(N, \tilde{N}) \cong \mathrm{Hom}_{A \otimes B}(M \otimes N, \tilde{M} \otimes \tilde{N}), \quad f \otimes g \mapsto f \otimes g$$

injektiv und K-linear ist. Die analog definierte Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(M, \tilde{M}) \otimes \mathrm{Hom}_K(N, \tilde{N}) \to \mathrm{Hom}_K(M \otimes_K N, \tilde{M} \otimes_K \tilde{N})$$

ist ebenfalls injektiv, also aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Wir finden also für $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A\otimes B}(M \otimes \tilde{M}, N \otimes \tilde{N})$ Abbildungen $f_i \in \mathrm{Hom}_K(M, \tilde{M})$ und $g_i \in \mathrm{Hom}_K(N, \tilde{N})$ mit

$$\varphi(m \otimes n) = \sum_i f_i(m) \otimes g_i(n) \quad \text{für alle } m \in M, n \in N.$$

Wir können annehmen, dass die f_i linear unabhängig in $\mathrm{Hom}_K(M, \tilde{M})$ sind. Damit ist dann auch $(f_i \otimes h_i) \in \mathrm{Hom}_K(M \otimes N, \tilde{M} \otimes \tilde{N})$ linear unabhängig, falls alle $h_i \neq 0$ sind: Ist (e_i) eine K-Basis von $\tilde{N}$ und sind $n_i \in N$ mit $0 \neq h_i(n_i) = \sum_j \lambda_i^j e_j$ gegeben, so impliziert $\sum_i f_i \otimes h_i = 0$, dass

$$\sum_i \lambda_i^j f_i(m) \otimes e_j = 0 \quad \text{für alle } m \in M, \text{ für alle j}$$

ist, Widerspruch.
Andererseits ist für alle $m \in M, n \in N$ und alle $b \in B$

$$(1 \otimes b) \sum_i f_i(m) \otimes g_i(n) = (1 \otimes b)\varphi(m \otimes n) = \varphi(m \otimes bn) = \sum_i f_i(m) \otimes g_i(bn),$$

also

$$\sum_i f_i \otimes (bg_i - g_i b) = 0.$$

Also muss $g_i b = bg_i$ sein, also $g_i \in \mathrm{Hom}_B(N, \tilde{N})$. Ist nun

$$\sum_i f_i \otimes g_i = \sum \tilde{f}_i \otimes \tilde{g}_i$$

mit $\tilde{f}_i \in \mathrm{Hom}_K(M, \tilde{M})$ und $\tilde{g}_i \in \mathrm{Hom}_B(N, \tilde{N})$, so können wir die $\tilde{g}_i$ als linear unabhängig über K voraussetzen. Ein analoges Argument zeigt, dass die $\tilde{f}_i$ A-linear sind. $\square$

Lemma 3.9. Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$ ist die Abbildung

$$\Phi_{\mathcal{K}} \colon \mathcal{K}_0(H_a) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(H_b) \to \mathcal{K}_0(H_a \otimes_K H_b), \quad M \otimes_{\mathbb{Z}} N \mapsto M \otimes_K N$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Um den Isomorphismus Ψ aus Korollar 3.5 zu konstruieren, haben wir lediglich benutzt, dass die H_n linksartinsch sind. Wir erhalten also analog einen Isomorphismus

$$\Upsilon \colon \mathcal{K}_0(H_a \otimes_K H_b) \to (\mathcal{G}_0(H_a \otimes_K H_b))'.$$

Mit $\Phi_{\mathcal{G}}$ aus Lemma 2.7 und λ aus Lemma 1.35 ist also $\Upsilon^{-1} \circ (\Phi_{\mathcal{G}}^{-1})' \circ \lambda \circ \Psi^{\otimes 2}$ ebenfalls ein Isomorphismus:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}_0(H_a) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(H_b) \arrow[d, "\Psi^{\otimes 2}"] & \mathcal{K}_0(H_a \otimes_K H_b) \\
\mathcal{G}_0(H_a)' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}_0(H_a)' \arrow[d, "\lambda"] & \\
(\mathcal{G}_0(H_a) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}_0(H_a))' \arrow[r, "(\Phi_{\mathcal{G}}^{-1})'"] & \mathcal{G}_0(H_a \otimes_K H_b)' \arrow[uu, "\Upsilon^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Wir wollen zeigen, dass $\Upsilon^{-1} \circ (\Phi_{\mathcal{G}}^{-1})' \circ \lambda \circ \Psi^{\otimes 2}$ die oben angegebene Abbildung ist.
Für projektive H_a- bzw. H_b-Moduln P und Q ist

$$\begin{aligned}(\Phi_{\mathcal{G}}^{-1})' \circ \lambda \circ \Psi^{\otimes 2}(P \otimes_{\mathbb{Z}} Q) &= (\Phi_{\mathcal{G}}^{-1})'(M \otimes_{\mathbb{Z}} N \mapsto \hat{\Psi}(P,M)\hat{\Psi}(Q,N)) \\ &= (M \otimes_K N \mapsto \hat{\Psi}(P,N)\hat{\Psi}(Q,N)).\end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\hat{\Psi}(P,M)\hat{\Psi}(Q,N) = \Upsilon(P \otimes_K Q)(M \otimes_K N),$$

also

$$\dim_K \operatorname{Hom}_{H_a}(P,M) \cdot \dim_K \operatorname{Hom}_{H_b}(Q,N) = \dim_K \operatorname{Hom}_{H_a \otimes_K H_b}(P \otimes_K Q, M \otimes_K N)$$

ist für alle H_a- bzw.H_b-Moduln M und N. Dies liefert 3.8. □

Lemma 3.10. Ist P ein endlich erzeugter projektiver H_{a+b}-Modul, so ist $\operatorname{Res}_{H_a \otimes H_b}^{H_{a+b}}(P)$ wieder endlich erzeugt und projektiv.

Beweis. Dass die Restriktion eines endlich erzeugten Moduls wieder endlich erzeugt ist, haben wir uns bereits bei der Definition von $\operatorname{Res}_{\mathcal{G}}$ überlegt.
Sind P, Q zwei H_{a+b}-Moduln mit $P \oplus Q \cong H_{a+b}$, so ist auch

$$P \oplus Q \cong H_{a+b} = \bigoplus_{\sigma^{-1} \in \mathcal{D}_{a+b}^a} (H_a \otimes H_b)T_\sigma \cong (H_a \otimes H_b)^{|\mathcal{D}_{a+b}^a|}$$

als $H_a \otimes_K H_b$-Modul. □

Definition 3.11. Mit Lemma 3.9 und Lemma 3.10 erhalten wir eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\operatorname{Res}_{\mathcal{K}} \colon \mathcal{K}_0(H) \to \mathcal{K}_0(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}_0(H), \quad \mathcal{K}_0(H_n) \ni M \mapsto \Phi_{\mathcal{K}}^{-1}\left(\bigoplus_{a+b=n} \operatorname{Res}_{H_a \otimes H_b}^{H_n}(M)\right).$$

Auch hier verzichten wir darauf, für $\operatorname{Ind}_{\mathcal{K}}$ und $\operatorname{Res}_{\mathcal{K}}$ die (Ko-)Assoziativität direkt nachzurechnen. Wir definieren aber schon einmal Eins und Koeins. Wie für $\mathcal{G}_0(H)$ benutzen wir dabei, dass $H_0 \cong K$ ist, alle H_0-Moduln sind also von der Form K^r und damit insbesondere projektiv.

Definition 3.12. Wir setzen

$$\eta_{\mathcal{K}} \colon \mathbb{Z} \to \mathcal{K}_0(H), \quad 1 \mapsto K \in \mathcal{K}_0(H_0)$$

und

$$\epsilon_{\mathcal{K}} \colon \mathcal{K}_0(H) \to \mathbb{Z}, \quad \mathcal{K}_0(H_n) \ni x \mapsto \begin{cases} r - s, & \text{falls } n = 0 \text{ und } x = K^r - K^s \in \mathcal{K}_0(H_0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.3 Dualität

Nachdem unsere Paarung konstruiert ist und wir eine mögliche Bialgebrastruktur auf $\mathcal{K}_0(H)$ gefunden haben, zeigen wir nun, dass die Strukturen auf $\mathcal{G}_0(H)$ und $\mathcal{K}_0(H)$ bezüglich der Paarung dual zueinander sind. Wir beginen mit dem einfacheren Teil der Dualität:

Lemma 3.13. Das Induktionsprodukt $\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}$ ist linksadjungiert zum Restriktionskoprodukt $\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}$ bezüglich $\hat{\Psi}$, das heißt es gilt

$$\hat{\Psi}(\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(a \otimes_{\mathbb{Z}} b), x) = \mathrm{mult}_{\mathbb{Z}} \circ \hat{\Psi}^{\otimes_{\mathbb{Z}}^2}(\mathrm{id} \otimes T \otimes \mathrm{id})(a \otimes_{\mathbb{Z}} b \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_{\mathcal{G}}(x)).$$

für alle $a, b \in \mathcal{K}_0(H), x \in \mathcal{G}_0(H)$.

Beweis. Gilt $\Phi_{\mathcal{G}}^{-1}\left(\mathrm{Res}^{H_{a+b}}_{H_r \otimes H_{a+b-r}} J\right) = \sum_t \lambda_t^r M_t^r \otimes_{\mathbb{Z}} N_t^r$ mit H_r-Moduln M_t^r und H_{a+b-r}-Moduln N_t^r, so ist für projektive H_a- bzw. H_b-Moduln P und Q

$$\begin{aligned}
& \mathrm{mult}_{\mathbb{Z}} \circ \hat{\Psi}^{\otimes_{\mathbb{Z}}^2}(\mathrm{id} \otimes T \otimes \mathrm{id})(P \otimes_{\mathbb{Z}} Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Res}_{\mathcal{G}} J) \\
= \; & \mathrm{mult}_{\mathbb{Z}} \circ \hat{\Psi}^{\otimes_{\mathbb{Z}}^2}(\mathrm{id} \otimes T \otimes \mathrm{id})(\sum_{r=0}^{a+b} P \otimes_{\mathbb{Z}} Q \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi_{\mathcal{G}}^{-1}\left(\mathrm{Res}^{H_{a+b}}_{H_r \otimes_K H_{a+b-r}} J\right)) \\
= \; & \mathrm{mult}_{\mathbb{Z}} \circ \hat{\Psi}^{\otimes_{\mathbb{Z}}^2}(\sum_{r=0}^{a+b} \sum_t \lambda_t^r P \otimes_{\mathbb{Z}} M_t^r \otimes_{\mathbb{Z}} Q \otimes_{\mathbb{Z}} N_t^r) \\
= \; & \sum_{r=0}^{a+b} \sum_t \lambda_t^r \hat{\Psi}(P \otimes_{\mathbb{Z}} M_t^r) \hat{\Psi}(Q \otimes_{\mathbb{Z}} N_t^r) \\
= \; & \sum_t \lambda_t^a \hat{\Psi}(P \otimes_{\mathbb{Z}} M_t^a) \hat{\Psi}(Q \otimes_{\mathbb{Z}} N_t^a) \\
= \; & \sum_t \lambda_t^a \dim_K \mathrm{Hom}_{H_a}(P, M_t^a) \dim_K \mathrm{Hom}_{H_b}(Q, N_t^a) \\
= \; & \sum_t \lambda_t^a \dim_K \mathrm{Hom}_{H_a \otimes H_b}(P \otimes_K Q, M_t^a \otimes_K N_t^a)
\end{aligned}$$

mit Lemma 3.8.
Andererseits ist für alle H_a-Moduln M, H_b-Moduln N und H_{a+b}-Moduln J

$$\mathrm{Hom}_{H_{a+b}}(H_{a+b} \otimes_{H_a \otimes H_b} (M \otimes N), J) \to \mathrm{Hom}_{H_a \otimes H_b}(M \otimes_K N, \mathrm{Res}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b} J),$$

$$\phi \mapsto (m \otimes n \mapsto \phi(1 \otimes (m \otimes n)))$$

eine K-lineare Bijektion, die Umkehrabbildung bildet $\varphi\colon M \otimes N \to \mathrm{Res}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b} J$ ab auf $h \otimes (m \otimes n) \mapsto h\varphi(m \otimes n)$.
Damit ist

$$\begin{aligned}
\hat{\Psi}(\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(P \otimes_{\mathbb{Z}} Q), J) &= \hat{\Psi}(\mathrm{Ind}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes_K H_b}(P \otimes Q), J) \\
&= \dim_K \mathrm{Hom}_{H_{a+b}}(\mathrm{Ind}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b}(P \otimes Q), J) \\
&= \dim_K \mathrm{Hom}_{H_a \otimes H_b}(P \otimes Q, \mathrm{Res}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b} J).
\end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung. $\square$

Nun wollen wir ein analoges Resultat für $\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}}$ und $\mathrm{Res}_{\mathcal{K}}$ beweisen. Analog zu eben wird das Kernstück des Beweises die Gleichung

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{H_a\otimes H_b}(\mathrm{Res}^{H_{a+b}}_{H_a\otimes H_b} P, M\otimes_K N) = \dim_K \mathrm{Hom}_{H_{a+b}}(P, \mathrm{Ind}^{H_{a+b}}_{H_a\otimes H_b} M\otimes_K N) \quad (3)$$

sein, dies erhält man allerdings erst nach deutlich mehr Arbeit und unter Ausnutzung der Struktur der Heckealgebren. Der hier geführte Beweis stammt bis auf einige Änderungen aus [4].
Zunächst versuchen wir, die unzerlegbaren projektiven H_n-Moduln besser zu verstehen.

Bemerkung 3.14. (i) Nach dem Satz von Krull-Schmidt [15, S.236] ist jeder endlichdimensionale H_n-Modul isomorph zu einer direkten Summe unzerlegbarer H_n-Moduln, und diese Zerlegung ist eindeutig bis auf Isomorphie und Anordnung. Ist also P ein unzerlegbarer projektiver H_n-Modul mit $P\oplus Q\cong H_n^r$, so folgt nach Anwendung des Satzes von Krull-Schmidt auf H_n und H_n^r, dass P isomorph zu einem unzerlegbaren Ideal von H_n ist. Umgekehrt ist offenbar jedes unzerlegbare Ideal von H_n projektiv.

(ii) Nach (i) gibt es für jedes unzerlegbare Ideal P von H_n ein Ideal Q mit $P\oplus Q = H_n$. Insbesondere gibt es eindeutig bestimmte $e\in P, f\in Q$ mit

$$e+f=1, ef=fe=0.$$

Dann ist aber $1=(e+f)^2=e^2+f^2$, also ist $e^2=e$ und $f^2=f$ und $P=H_ne$.

Norton hat in [24] die unzerlegbaren Linksideale von H_n bestimmt, dazu benötigt sie die Existenz und Eindeutigkeit eines Elements maximaler Länge in Σ_n. Das folgende Lemma gilt für jede Coxetergruppe. Wir beweisen es nur für die Gruppen, für die wir es hier und später benötigen.

Lemma 3.15. Es sei $J\subset \underline{n-1}$ und $\Sigma_J := \langle \sigma_i | i\in J\rangle$ die von den σ_i erzeugte Unterguppe von Σ_n. Dann gibt es ein eindeutig bestimmes Element $\omega_{0,J}$ maximaler Länge in Σ_J.
Für jedes $\sigma\in\Sigma_J$ gibt es ein $\tilde\sigma\in\Sigma_J$ mit

$$\omega_{0,J}=\tilde\sigma\sigma \quad \text{und} \quad \mathrm{l}(\omega_{0,J})=\mathrm{l}(\tilde\sigma)+\mathrm{l}(\sigma).$$

Beweis. Es gibt genau ein $\omega_{0,J}\in\Sigma_J$ mit $\mathrm{Des}(\omega_{0,J})=J$, da $\omega_{0,J}(i)=i$ sein muss für $i\notin J$ und $\omega_{0,J}$ die Reihenfolge der $j\in J$ umkehrt. Andererseits kann ein $\sigma\in\Sigma_J$ mit $\mathrm{Des}(\sigma)\subsetneq J$ nicht maximal lang sein, denn wenn $i\notin\mathrm{Des}(\sigma)$ ist, so ist $\sigma\sigma_i$ länger als σ. Also ist $\omega_{0,J}$ das längste Element in Σ_J und durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Zu gegebenem $\sigma\in\Sigma_J$ betrachte $\tilde\sigma := \omega_{0,J}\sigma^{-1}$. Offenbar ist $\omega_{0,J}=\tilde\sigma\sigma$ und $\mathrm{l}(\omega_{0,J}) = \mathrm{l}(\tilde\sigma)+\mathrm{l}(\sigma)$. □

Satz 3.16. Die 2^{n-1} verschiedenen unzerlegbaren Linksideale von H_n sind gegeben durch

$$P_J := H_n o_{J^c} e_J, \quad J\subset \underline{n-1}$$

mit

$$e_J := \sum_{\sigma\in\Sigma_J} T_\sigma \quad \text{und} \quad o_J := (-1)^{\mathrm{l}(\omega_{0,J})}.$$

Es gilt $H_n o_{J^c} e_J \cong H_n e_J o_{J^c}$.
Analoge Aussagen gelten für die unzerlegbaren Rechtsideale von H_n [24]. □

Zentral für den Beweis von (3) wird Lemma 3.21 sein. Dieses Lemma vergleicht Zerlegungen in durch idempotente Elemente gegebene projektive unzerlegbare Links- und Rechtsmoduln miteinander. Hierfür wiederum benutzen wir das recht technische Lemma 3.20, und um dieses anzuwenden, benötigen wir, das H_n eine Frobeniusalgebra ist.

Definition 3.17. Eine endlichdimensionale Algebra A über einem Körper K heißt Frobeniusalgebra, wenn es eine K-lineare Abbildung $\gamma\colon A \to K$ gibt, sodass $\ker \lambda$ kein A-Linksideal ungleich 0 enthält.

Lemma 3.18. Die H_n sind Frobeniusalgebren.

Beweis. (siehe [8]) Bezeichne ω_0 das Element maximaler Länge in Σ_n. Wir definieren $\gamma\colon H_n \to K$ durch $T_\sigma \mapsto \delta_{\sigma,\omega_0}$.
Es sei nun $h = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \lambda_\sigma T_\sigma \in H_n$ und $\omega \in \Sigma_n$ ein Element maximaler Länge mit $\lambda_\omega \neq 0$. Betrachte $T_{\omega_0\omega^{-1}}h$: Nach Lemma 3.15 gibt es ein $\tilde{\omega}$ mit

$$\omega_0 = \tilde{\omega}\omega \quad \text{und} \quad \mathrm{l}(\tilde{\omega}) + \mathrm{l}(\omega) = \mathrm{l}(\omega_0).$$

Für $\sigma \in \Sigma_n$ mit $\mathrm{l}(\sigma) < \mathrm{l}(\omega)$ ist $\mathrm{l}(\tilde{\omega}\sigma) \leq \mathrm{l}(\tilde{\omega}) + \mathrm{l}(\sigma) < \mathrm{l}(\omega_0)$, also ist $T_{\tilde{\omega}}T_\sigma$ kein Vielfaches von T_{ω_0}. Ist $\sigma \in \Sigma_n$ mit $\mathrm{l}(\sigma) = \mathrm{l}(\omega)$ und $T_{\tilde{\omega}}T_\sigma$ ein Vielfaches von T_{ω_0}, so muss wegen $\mathrm{l}(\omega_0) = \mathrm{l}(\tilde{\omega}) + \mathrm{l}(\omega) = \mathrm{l}(\tilde{\omega}) + \mathrm{l}(\sigma)$ bereits $\tilde{\omega}\sigma = \omega_0 = \tilde{\omega}\omega$ sein, also $\omega = \sigma$. Umgekehrt gilt $T_{\tilde{\omega}}T_\omega = T_{\omega_0}$, also ist

$$\gamma(T_{\tilde{\omega}}h) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \lambda_\sigma \gamma(T_{\tilde{\omega}}T_\sigma) = \lambda_\omega \neq 0.$$

Folglich gibt es für jedes $h \in H_n$ ein $l \in H_n$ mit $\gamma(lh) \neq 0$, der Kern von γ enthält also kein nichttriviales Linksideal von A. □

Lemma 3.19. Ist A eine K-Frobeniusalgebra, so ist jeder endlich erzeugte projektive A-Linksmodul auch injektiv (siehe [15, S.242]). □

Lemma 3.20. Es sei A eine K-Frobeniusalgebra und $a \in A$, so dass Aa projektiv ist. Dann gibt es genau dann ein $b \in B$ mit $Aa \cong Ab$, wenn es $u, v, x, y \in A$ gibt mit

$$\begin{aligned} av &= ub, & xa &= bv, \\ uxa &= a, & xub &= b, \\ avy &= a, & byv &= b. \end{aligned}$$

Beweis. (siehe [4]) Existieren solche u, v, x und y, so rechnet man leicht nach, dass

$$f\colon Aa \to Ab, \quad a \mapsto ub$$

eine A-lineare Bijektion mit Umkehrabbildung gegeben durch $b \mapsto xa$ ist.
Ist umgekehrt ein Isomorphismus $g\colon Aa \to Ab$ von A-Moduln gegeben, so gibt es $u, x \in A$ mit $g(a) = ub$ und $g(xa) = b$.
Ist $i\colon Aa \to A$ die Inklusion, so gibt es nach Lemma 3.19 Abbildungen g_a und g_b, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Aa \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[dl, "g_a"] \\ & Ab & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Ab \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g^{-1}"] & A \arrow[dl, "g_b"] \\ & Aa & \end{tikzcd}$$

kommutieren. Setze $v := g_a(1)$ und $y := g_b(1)$. Man rechnet leicht nach, dass die so konstruierten Elemente die behaupteten Relationen erfüllen. □

Lemma 3.21. Es seien $e_i, \tilde{e}_i \in H_a$, $f_i, \tilde{f}_i \in H_b$ und $e \in H_{a+b}$ idempotent, so dass die durch diese Elemente erzeugten Moduln projektiv und unzerlegbar sind. Weiter sei

$$H_{a+b}e \oplus \bigoplus_i (H_a \otimes H_b)(e_i \otimes f_i) \cong \bigoplus_i (H_a \otimes H_b)(\tilde{e}_i \otimes \tilde{f}_i)$$

als $H_a \otimes H_b$-Linksmodul. Dann ist auch

$$eH_{a+b} \oplus \bigoplus_i (e_i \otimes f_i)(H_a \otimes H_b) \cong \bigoplus_i (\tilde{e}_i \otimes \tilde{f}_i)(H_a \otimes H_b)$$

als $H_a \otimes H_b$-Rechtsmodul.

Beweis. Der Beweis einer ähnlichen Aussage findet sich in [4]. Wir definieren einen Antihomomorphismus $\tau\colon H_n \to H_n$ durch $\tau(T_i) := T_i$. Die lineare Abbildung τ kehrt also die Reihenfolge der Faktoren eines Produktes um, es ist $\tau(T_\sigma) = T_{\sigma^{-1}}$.
Da das längste Wort $\omega_{0,J}$ in Σ_J eindeutig bestimmt ist, andererseits aber das Invertieren von Permutationen deren Länge erhält, ist $\omega_{0,J} = \omega_{0,J}^{-1}$, also $\tau(o_J) = o_J$ für beliebiges $J \subset \underline{a+b-1}$. Da offensichtlich auch $\tau(e_J) = e_J$ ist, gilt

$$H_{a+b}\tau(o_{J^c}e_J) = H_{a+b}\tau(e_J)\tau(o_{J^c}) = H_{a+b}e_J o_{J^c} = H_{a+b}o_{J^c}e_J$$

nach Satz 3.16. Es sei nun $e \in H_{a+b}$ wie oben gegeben mit $H_{a+b}e \cong H_{a+b}o_{J^c}e_J$. Dann gibt es $u, v, x, y \in H_n$ zu e und $o_{J^c}e_J$, die die Relationen aus Lemma 3.20 erfüllen. Wendet man τ auf diese Relationen an, so liefert erneute Anwendung des Lemmas, dass

$$H_{a+b}\tau(e) \cong H_{a+b}\tau(o_{J^c}e_J) \cong H_{a+b}o_{J^c}e_J \cong H_{a+b}e$$

als H_{a+b}-Modul ist. Ebenso erhält man

$$H_a\tau(e_i) \cong H_a e_i \qquad \text{und} \qquad H_b\tau(f_i) \cong H_b f_i,$$

analog für $\tilde{e}_i$ und $\tilde{f}_i$. Damit ergibt sich schließlich, dass

$$\begin{aligned}
\tau(eH_{a+b} \oplus \bigoplus_i (e_i \otimes f_i)(H_a \otimes H_b)) &\cong H_{a+b}\tau(e) \oplus \bigoplus_i (H_a \otimes H_b)\tau(e_i \otimes f_i) \\
&= H_{a+b}\tau(e) \oplus \bigoplus_i (H_a\tau(e_i) \otimes H_b\tau(f_i)) \\
&\cong H_{a+b}e \oplus \bigoplus_i (H_a e_i \otimes H_b f_i) \\
&\cong \bigoplus_i (H_a \otimes H_b)(\tilde{e}_i \otimes \tilde{f}_i) \\
&\cong \bigoplus_i (H_a \otimes H_b)\tau(\tilde{e}_i \otimes \tilde{f}_i)
\end{aligned}$$

ist als $H_a \otimes H_b$-Modul. Nach erneuter Anwendung von τ folgt die Behauptung. □

Nun sind wir endlich in der Lage, (3) zu beweisen.

Lemma 3.22. Es sei P ein projektiver H_{a+b}-Modul, es seien weiter M und N zwei H_a- bzw. H_b-Moduln. Dann ist

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{H_a \otimes H_b}(\mathrm{Res}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b} P, M \otimes_K N) = \dim_K \mathrm{Hom}_{H_{a+b}}(P, \mathrm{Ind}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b} M \otimes_K N).$$

Beweis. (vergleiche [4]) Der projektive Modul P ist eine direkte Summe unzerlegbarer projektiver H_{a+b}-Moduln. Wir können annehmen, dass P selbst bereits unzerlegbar ist. Nach Bemerkung 3.14 gibt es also ein idempotentes $e \in H_{a+b}$ mit $P \cong H_{a+b}e$. Nach Lemma 3.10 ist auch $\mathrm{Res}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b} P$ projektiv und endlich erzeugt. Folglich gibt es idempotente Elemente $e_i, \tilde{e}_i \in H_a$ und $f_i, \tilde{f}_i \in H_b$ mit

$$H_{a+b}e = \Phi_{\mathcal{K}}\left(\sum_i (H_a \otimes H_b)(\tilde{e}_i \otimes \tilde{f}_i) - \sum_i (H_a \otimes H_b)(e_i \otimes f_i)\right)$$

in $\mathcal{K}_0(H_a \otimes H_b)$, also nach Bemerkung 3.3

$$H_{a+b}e \oplus \bigoplus_i (H_a \otimes H_b)(e_i \otimes f_i) \cong \bigoplus_i (H_a \otimes H_b)(\tilde{e}_i \otimes \tilde{f}_i)$$

als $H_a \otimes H_b$-Modul. Nun ist für jede K-Algebra A, jedes idempotente Element $f \in A$ und jeden A-Modul L

$$\mathrm{Hom}_A(Af, L) = fL$$

als K-Vektorraum: Man ordne jedem $\varphi\colon Af \to L$ das Element $\varphi(f) = \varphi(ff) = f\varphi(f) \in fL$ zu.
Mit Lemma 3.21 erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Hom}_{H_a \otimes H_b}(\mathrm{Res}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b} P, M \otimes N) \oplus \mathrm{Hom}_{H_a \otimes H_b}(\bigoplus_i (H_a \otimes H_b)(e_i \otimes f_i), M \otimes N) \\
\cong\ & \mathrm{Hom}_{H_a \otimes H_b}(H_{a+b}e \oplus \bigoplus_i (H_a \otimes H_b)(e_i \otimes f_i), M \otimes N) \\
\cong\ & \mathrm{Hom}_{H_a \otimes H_b}(\bigoplus (H_a \otimes H_b)(\tilde{e}_i \otimes \tilde{f}_i), M \otimes N) \\
\cong\ & \bigoplus_i (\tilde{e}_i \otimes \tilde{f}_i)(M \otimes N) \\
\cong\ & \left(\bigoplus_i (\tilde{e}_i \otimes \tilde{f}_i)(H_a \otimes H_b)\right) \otimes_{H_a \otimes H_b} (M \otimes N) \\
\cong\ & (eH_{a+b} \oplus \bigoplus_i (e_i \otimes f_i)(H_a \otimes H_b)) \otimes_{H_a \otimes H_b} (M \otimes N) \\
\cong\ & e(H_{a+b} \otimes_{H_a \otimes H_b} (M \otimes N)) \oplus \bigoplus_i (e_i \otimes f_i)(M \otimes N) \\
\cong\ & \mathrm{Hom}_{H_{a+b}}(H_{a+b}e, H_{a+b} \otimes_{H_a \otimes H_b} (M \otimes N)) \oplus \bigoplus_i \mathrm{Hom}_{H_a \otimes H_b}((H_a \otimes H_b)(e_i \otimes f_i), M \otimes N) \\
\cong\ & \mathrm{Hom}_{H_{a+b}}(P, \mathrm{Ind}^{H_{a+b}}_{H_a \otimes H_b} M \otimes N) \oplus \mathrm{Hom}_{H_a \otimes H_b}(\bigoplus_i (H_a \otimes H_b)(e_i \otimes f_i), M \otimes N)
\end{aligned}$$

als K-Vektorraum. $\square$

Nun erhalten wir endlich das Analogon zu Lemma 3.13:

Lemma 3.23. Die Abbildung $\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}}$ ist rechtsadjungiert zu $\mathrm{Res}_{\mathcal{K}}$ bezüglich $\hat{\Psi}$, das heißt es gilt

$$\hat{\Psi}(a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Ind}_{\mathcal{G}}(x \otimes_{\mathbb{Z}} y)) = \mathrm{mult}_{\mathbb{Z}} \circ \hat{\Psi}^{\otimes^2_{\mathbb{Z}}}(\mathrm{id} \otimes T \otimes \mathrm{id})(\mathrm{Res}_{\mathcal{K}}(a) \otimes_{\mathbb{Z}} x \otimes_{\mathbb{Z}} y)$$

für alle $a \in \mathcal{K}_0(H), x, y \in \mathcal{G}_0(H)$.

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 3.13 erhalten wir für H_a- bzw. H_b-Moduln M und N und einen projektiven H_{a+b}-Modul P mit

$$\Phi_{\mathcal{K}}^{-1}\left(\mathrm{Res}_{H_r\otimes H_{a+b-r}}^{H_{a+b}} P\right) = \sum_t \lambda_t^r P_t^r \otimes_{\mathbb{Z}} Q_t^r,$$

dass

$$\mathrm{mult}_{\mathbb{Z}} \circ \hat{\Psi}^{\otimes_{\mathbb{Z}}^2}(\mathrm{id}\otimes T\otimes \mathrm{id})(\mathrm{Res}_{\mathcal{K}} P \otimes_{\mathbb{Z}} M \otimes_{\mathbb{Z}} N) = \dim_K \mathrm{Hom}_{H_a\otimes_K H_b}(\mathrm{Res}_{H_a\otimes H_b}^{H_{a+b}} P, M\otimes_K N)$$

ist. Mit Lemma 3.22 erhalten wir

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{H_a\otimes_K H_b}(\mathrm{Res}_{H_a\otimes H_b}^{H_{a+b}} P, M\otimes_K N) = \dim_K \mathrm{Hom}_{H_{a+b}}(P, \mathrm{Ind}_{H_a\otimes H_b}^{H_{a+b}}(M\otimes_K N))$$

und damit die Behauptung. □

Die nichtausgeartete Paarung $\hat{\Psi}$ lieferte uns eine bijektive $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung von $\mathcal{K}_0(H)$ in das graduiert Duale von $\mathcal{G}_0(H)$. Unter der Paarung entspricht die Kandidatin für die Multiplikation in $\mathcal{K}_0(H)$ der Komultiplikation in $\mathcal{G}_0(H)$ und umgekehrt. Die Multiplikation im graduiert Dualen war aber gerade durch das Duale der Komultiplikation definiert, gleiches gilt für die Komultiplikation. Der folgende Satz ist demnach keine Überraschung:

Satz 3.24. Die Abbildung Ψ ist ein Isomorphismus graduierter Bialgebren.

Beweis. Ein Blick zurück auf Lemma 1.35 erinnert, dass die Multiplikation in $\mathcal{G}(H)'$ definiert ist als $\mathrm{Res}'_{\mathcal{G}} \circ \lambda$ mit $\lambda\colon \mathcal{G}(H)' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}(H)' \to (\mathcal{G}(H)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}(H))'$. Mit Lemma 3.23 ist also für $a, b \in \mathcal{K}(H)$

$$\begin{aligned}
\Psi(a)\Psi(b) &= \mathrm{Res}'_{\mathcal{G}}(x\otimes y \mapsto \Psi(a)(x)\Psi(b)(y)) \\
&= (x \mapsto \mathrm{mult}_{\mathbb{Z}} \circ (\Psi(a)\otimes_{\mathbb{Z}} \Psi(b))(\mathrm{Res}_{\mathcal{G}}(x))) \\
&= (x \mapsto \mathrm{mult}_{\mathbb{Z}} \circ \hat{\Psi}^{\otimes^2} \circ (\mathrm{id}\otimes T\otimes \mathrm{id})(a\otimes b\otimes \mathrm{Res}_{\mathcal{G}}(x))) \\
&= (x \mapsto \hat{\Psi}(\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(a\otimes b)\otimes x)) \\
&= \Psi(\mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}(a\otimes b)).
\end{aligned}$$

Ebenso erhält man für die Komultiplikation $\lambda^{-1}\circ \mathrm{Ind}'_{\mathcal{G}}$ in $\mathcal{G}(H)'$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}'_{\mathcal{G}}(\Psi_{\mathcal{G},\mathcal{K}}(a)) &= (x\otimes_{\mathbb{Z}} y \mapsto \hat{\Psi}(\mathrm{Ind}_{\mathcal{G}}(x\otimes y)\otimes a)) \\
&= (x\otimes_{\mathbb{Z}} y \mapsto \mathrm{mult}_{\mathbb{Z}} \circ \hat{\Psi}^{\otimes^2} \circ (\mathrm{id}\otimes T\otimes \mathrm{id})(x\otimes y\otimes \mathrm{Res}_{\mathcal{K}} a)) \\
&= \lambda \circ \Psi_{\mathcal{G},\mathcal{K}}(\mathrm{Res}_{\mathcal{K}} a).
\end{aligned}$$

Weiter ist mit $\phi\colon K \to K'$ aus 1.35 für $x \in \mathcal{G}_0(H_n)$

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \eta_{\mathcal{K}}(1)(x) = \hat{\Psi}_{K,G}(K\otimes x) &= \begin{cases} r-s, & \text{falls } x = K^r - K^s \in \mathcal{G}_0(H_0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \epsilon_{\mathcal{G}}(x) \\
&= \epsilon'_{\mathcal{G}}(1\mapsto 1)(x) \\
&= \epsilon'_{\mathcal{G}} \circ \phi(1)(x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\phi \circ \epsilon_{\mathcal{K}}(a) &= \phi\left(\begin{cases} r-s, & \text{falls } a = K^r - K^s \in \mathcal{G}_0(K_0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\right) \\
&= (1 \mapsto \begin{cases} r-s, & \text{falls } a = K^r - K^s \in \mathcal{G}_0(K_0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}) \\
&= (1 \mapsto \hat{\Psi}(\eta_{\mathcal{G}}(1) \otimes a) \\
&= \eta'_{\mathcal{G}} \circ \Psi_{\mathcal{G},\mathcal{K}}(a).
\end{aligned}$$

Folglich entsprechen der Bialgebrastruktur auf $\mathcal{G}_0(H)$ nach Dualisieren gerade unsere auf $\mathcal{K}_0(H)$ definierten Abbildungen, $(\mathcal{K}_0(H), \mathrm{Ind}_{\mathcal{K}}, \mathrm{Res}_{\mathcal{K}}\eta_{\mathcal{K}}, \epsilon_{\mathcal{K}})$ ist eine Bialgebra und isomorph zu $\mathcal{G}_0(H)'$. □

Insbesondere liefert Lemma 1.37:

Korollar 3.25. Die Summe $\mathcal{K}(H)$ der 0-ten K-Gruppen der H_n ist isomorph zu NSymm als Bialgebra (und damit auch als Hopfalgebra).

4 Das Diamantprodukt

4.1 Ein zweites Koprodukt auf QSymm

Die Hopfalgebra Symm der symmetrischen Potenzreihen von beschränktem Grad ist ein wiederholt in verschiedenen Kontexten auftretendes Objekt. In Abschnitt 1 hatten wir die Isomorphie von Symm zum Darstellungsring der symmetrischen Gruppen angesprochen. Symm tritt auch als Homologie und Kohomologie eines Raumes auf, in 4.2 werden wir sehen, dass dies ebenfalls für NSymm und QSymm gilt. Vorher erläutern wir noch eine dritte Interpretation von Symm und die dazugehörige Struktur:

Bemerkung 4.1. Ein λ-Ring L ist ein kommutativer Ring mit Operationen

$$\lambda_n \colon L \to L, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

die sich im Wesentlichen wie äußere Potenzen verhalten. Ein Morphismus von λ-Ringen ist ein Ringhomomorphismus, der mit allen λ_n vertauscht. Man erhält die Kategorie **λ-Rings**.
Für einen beliebiger kommutativer Ring R ist der universelle λ-Ring $\Lambda(R)$ als Menge gegeben durch

$$\Lambda(R) = \{1 + \sum_{i=0}^{\infty} r_i t^i | r_i \in R\}.$$

$\Lambda(R)$ besteht also aus Potenzreihen in einer Unbestimmten mit Koeffizienten in R und konstantem Term gleich 1. Eine in R natürliche Gruppenstruktur auf $\Lambda(R)$ ist durch das Produkt von Potenzreihen gegeben, und man kann auf $\Lambda(R)$ eine in R natürliche Multiplikation und in R natürliche Operationen λ_n definieren, die $\Lambda(R)$ zu einem λ-Ring machen. Wir erhalten also einen kovarianten Funktor von der Kategorie **Rings** der kommutativen Ringe nach **λ-Rings**, dieser ist rechtsadjungiert zum Vergissfunktor **λ-Rings** $\to$**Rings** [11, Abschnitt 17 und E.2].

Die Verbindung zu Symm ist nun die Folgende: Der Funktor Λ ist als Funktor nach **Set** darstellbar mit darstellendem Objekt Symm, und die Hopfalgebrastruktur auf Symm induziert die Gruppenstruktur auf $\Lambda(R)$.

Definition 4.2. Ein Funktor F: **Rings** $\to$ **Set** heißt darstellbar, wenn es ein $S \in$ **Rings** gibt, so dass F natürlich isomorph zu

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rings}}(S, -) \colon \mathbf{Rings} \to \mathbf{Set}$$

ist, es also für jeden kommutativen Ring R eine Bijektion $\tau_R \colon F(R) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rings}}(S, R)$ gibt und diese Bijektionen mit induzierten Abbildungen vertauschen.

Beispielsweise ist nach [11] Λ dargestellt durch Symm, eine natürliche Transformation ist gegeben durch

$$\tau_R \colon \Lambda(R) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rings}}(\mathrm{Symm}, R), \quad 1 + \sum_{i=0}^{\infty} r_i t^i \mapsto (z_i \mapsto r_i).$$

Man rechnet leicht nach:

Satz 4.3. Ist S eine kommutative Hopfalgebra, so induzieren Komultiplikation, Koeins und Antipode eine in R natürliche Gruppenstruktur auf $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rings}}(S, R)$, wir erhalten also einen Funktor nach **Grp**. Ist beispielsweise μ die Multiplikation in R und Δ die Komultiplikation ins S, so definieren wir für $f, g \colon S \to R$

$$(f + g)(s) := \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta(s).$$

$\square$

Zum Beispiel induziert die Hopfalgebrastruktur auf Symm in der eben angegebenen Weise die Gruppenstruktur auf $\Lambda(R)$.

Nun stellt sich die Frage, ob die Ringstruktur von $\Lambda(R)$ ebenfalls durch Strukturen auf Symm induziert ist. Dies trifft zu: Es gibt neben der in Abschnitt 1 definierten Komultiplikation Δ_S eine zweite Komultiplikation

$$\tilde{\Delta}_S \colon \mathrm{Symm} \to \mathrm{Symm} \otimes \mathrm{Symm},$$

und eine zugehörige Koeins, die auf die in Satz 4.3 aufgezeigte Art die Multiplikation und Eins in $\Lambda(R)$ induzieren [13]

Wir haben in Abschnitt 1 zwei Verallgemeinerungen von Symm kennengelernt: Symm lässt sich als Polynomalgebra in abzählbar vielen kommutierenden Unbestimmten z_i (die den elementarsymmetrischen Funktionen entsprechen) auffassen, und NSymm ist die Polynomalgebra in abzählbar vielen nichtkommutierenden Unbestimmten Z_i mit analog zu Symm definierter Komultiplikation und Antipode. QSymm andererseits ist die Hopfalgebra der quasisymmetrischen Potenzreihen, entsteht also durch eine Abschwächung der Symmetriebedingung.

Bemerkung 4.4. Man kann genauer zeigen: Die Surjektion

$$s \colon \mathrm{NSymm} \to \mathrm{Symm}, \quad Z_i \mapsto z_i$$

induziert einen Hopfalgebraisomorphismus $\mathrm{NSymm}/\ker s \cong \mathrm{Symm}$, wir erhalten also Symm als Quotienten von NSymm. Weiter entspricht dieser Quotient unter der Dualität zwischen NSymm und QSymm gerade der Unterhopfalgebra Symm von QSymm, und Symm ist graduiert dual zu sich selbst [12].

Viele der (hier größtenteils nicht besprochenen) Strukturen von Symm lassen sich auf NSymm und QSymm in bezüglich Bemerkung 4.4 kohärenter Weise verallgemeinern. Dies gilt auch für die zweite Komultiplikation von Symm (siehe [13]):

Definition 4.5. (i) Wir definieren eine totale Ordnung auf den Positionen in einer Matrix wie folgt: Eine Position x ist kleiner als eine Position y, wenn x über y steht, oder wenn x und y in der gleichen Zeile und x links von y steht.
Es sei nun $\alpha = (a_1, ..., a_k) \models n$ eine Komposition. Eine $r \times s$-Matrix M heißt $(0, \alpha)$-Matrix, wenn gilt:

- Die Matrix hat genau k Einträge ungleich 0, und zwar $a_1, ..., a_k$.

- Die $a_1, .., a_k$ sind in ihrer Reihenfolge in M eingetragen: Ist $i < j$, so ist die Position, an der a_i steht, kleiner als die, an der a_j steht.
- Jede Zeile und jede Spalte von M enthält einen Eintrag ungleich 0.

(ii) Ist M eine beliebige Matrix, so sei der Vektor der Zeilensummen mit $r(M)$ bezeichnet. Der i-te Eintrag von $c(M)$ ist also die Summe aller Einträge in der i-ten Zeile von M. Analog ist der Vektor der Spaltensummen $c(M)$ definiert.

(iii) Das zweite Koprodukt $\tilde{\Delta}_Q$ auf QSymm ist definiert als

$$\tilde{\Delta}_Q : \mathrm{QSymm} \to \mathrm{QSymm} \otimes \mathrm{QSymm}, \quad M_\alpha \mapsto \sum_{M \text{ ist } (0,\alpha)\text{-Matrix}} M_{r(M)} \otimes M_{c(M)}.$$

Eingeschränkt auf Symm ist $\tilde{\Delta}_Q$ gerade die zweite Komultiplikation $\tilde{\Delta}_S$ von Symm.

Wir werden im Folgenden sehen, dass QSymm als Hopfalgebra eine topologische Interpretation besitzt, und einen Versuch unternehmen, das zweite Koprodukt auf QSymm als induzierte Abbildung zu erhalten.

4.2 Ein topologischer Ursprung von QSymm

Die symmetrischen Funktionen Symm lassen sich topologisch als Kohomologie $H^*(BU)$ bzw. Homologie $H_*(BU)$ des klassifizierenden Raumes BU der unitären Gruppe $U = \operatorname{colim} U(n)$ auffassen [16, S.50]. Baker und Richter zeigen in [3], dass auch die Hopfalgebren NSymm und QSymm eine topologische Interpretation besitzen: Sie sind Homologie bzw. Kohomologie des Raumes $\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty$. Dies wollen wir jetzt nachvollziehen.

Zusatzliche Strukturen auf Homologie und Kohomologie erhält man, wenn man H-Räume betrachtet:

Definition 4.6. (i) Ein topologischer Raum X zusammen mit einer stetigen Abbildung $\mu\colon X \times X \to X$ und einem ausgezeichneten Element $x_0 \in X$ heißt H-Raum, wenn die Diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "\mu\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\mu"] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ X \times X \arrow[r, "\mu"] & X \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} \{x_0\} \times X \arrow[r, "\mathrm{inc}"] \arrow[dr, "\cong"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] & X \times \{x_0\} \arrow[l, "\mathrm{inc}"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

bis auf Homotopie kommutieren. Anschaulich ist X also ein Monoid bis auf Homotopie.

(ii) Gibt es zusätzlich eine stetige Abbildung $\mathrm{inv}\colon X \to X$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[rr, "\mathrm{inv}\times\mathrm{id}"] & & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ X \arrow[u, "\mathrm{diag}"] \arrow[d, "\mathrm{diag}"'] \arrow[r] & \{x_0\} \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & X \\ X \times X \arrow[rr, "\mathrm{id}\times\mathrm{inv}"] & & X \times X \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

bis auf Homotopie kommutiert, so bezeichnet man X als H-Gruppe.

(iii) Ist das entspechende Diagramm tatsächlich kommutativ, so heißt μ strikt assoziativ, x_0 striktes Einselement oder inv strikte Inversenbildung.

(iv) Sind (X, μ_X, x_0) und (Y, μ_Y, y_0) H-Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, so heißt f eine Abbildung von H-Räumen, falls

$$f \circ \mu_X \simeq \mu_Y \circ (f \times f) \qquad \text{und} \qquad f(x_0) = y_0$$

ist.

Wir werden im folgenden die Homologie und Kohomologie einer speziellen Art von Schleifenräumen betrachten:
Ist (Y, y_0) ein beliebiger topologischer Raum mit Basispunkt y_0, so ist der Schleifenraum $\Omega Y := \{\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to Y | \gamma \text{ ist stetig } \}$ eine H-Gruppe: Die Multiplikation ν ist gegeben durch nacheinander Durchlaufen $*$ von Wegen, das Einselement ist $c_{x_0} := (t \mapsto y_0)$, und das Inverse eines Weges ist der umgekehrt durchlaufene Weg.
Ist $Y = \Sigma X = \mathbb{S}^1 \wedge X$ die reduzierte Einhängung eines punktierten Raumes (X, x_0), so erhalten wir für jeden Punkt $x \in X$ eine Schleife

$$i_x\colon [0, 1] \to \Sigma X, \quad t \mapsto [t, x],$$

indem wir im Punkt x die Einhängung durchlaufen. Diese Schleifen nennen wir einfache Schleifen. Es stellt sich heraus, dass $\Omega\Sigma X$ im Wesentlichen aus nacheinander durchlaufenen einfachen Schleifen besteht:

Definition 4.7. Es sei (X, x_0) ein beliebiger punktierter topologischer Raum. Die James-Konstruktion JX ist der Raum

$$JX := \left(\bigsqcup X^n\right) / \sim \qquad \text{mit} \quad X^n \ni (x_1, ..., x_n)\tilde{}(x_1, ..., x_i, x_0, x_{i+1}, ..., x_n) \in X^{n+1}.$$

Algebraisch gesprochen machen wir also x_0 zum Einselement in der von X erzeugten freien Halbgruppe: Wir identifizieren Wörter in X, wenn sie nach Entfernen des Buchstabens x_0 gleich sind. Der Raum JX ist ein strikt assoziativer H-Raum mit Multiplikation

$$((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_m)) \mapsto (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$$

und striktem Einselement x_0 [9, S.224].
Die Abbildung $i\colon X \to JX, x \mapsto x$ ist eine Inklusion, wir können also X als Teilmenge von JX auffassen.

Lemma 4.8. Die James-Konstruktion JX erfüllt die folgende Eigenschaft:
Es sei Y ein strikt assoziativer H-Raum mit strikter Eins, $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es genau eine Fortsetzung $\tilde{f}\colon JX \to Y$ von f zu einem Homomorphismus von Monoiden:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & JX \arrow[d, "\exists! \tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Man nennt JX daher auch den freien von X erzeugten H-Raum [29, S.329]. □

Lemma 4.9. Sei X ein zusammenhängender CW-Komplex mit Basispunkt x_0 und $d\colon X \to [0,1]$ eine stetige Abbildung mit $d^{-1}(0) = x_0$. Dann gilt:

(i) Die Abbildung

$$f :: JX \to \Omega\Sigma X, \quad (x_1, ..., x_n) \mapsto i_{x_1} * ... * i_{x_n}$$

ist im Allgemeinen nicht wohldefiniert: Ist beispielsweise $x_n = x_0$, so durchlaufen $i_{x_1} * ... * i_{x_n}$ und $i_{x_1} * ... * i_{x_{n-1}}$ zwar dieselben Punkte, aber unterschiedlich parametrisiert. Wir können allerdings f so abändern, dass die Zeit, in der i_{x_i} in $f(i_{x_1}, ..., i_{x_n})$ durchlaufen wird, proportional zu $d(x_i)$ ist. Dann ist f eine schwache Homotopieäquivalenz [9, S.471ff].

(ii) Nach Milnor [22] ist der Schleifenraum eines CW-Komplexes homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex. Mit Whiteheads Theorem ist also die Abbildung aus (i) eine Homotopieäquivalenz. □

Abbildungen auf Räumen induzieren Abbildungen auf Homologie und Kohomologie, und kommutative Diagramme übertragen sich entsprechend ko- oder kontravariant:

Lemma 4.10. Es sei X ein H-Raum mit Multiplikation ν und Einselement x_0.

(i) Ist $H^*(X)$ frei und endlich erzeugt, so ist das Kreuzprodukt

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \xrightarrow{\times} H^*(X \times X)$$

ein Isomorphismus. Neben der üblichen durch das Cupprodukt gegebenen graduierten $\mathbb{Z}$-Algebrastruktur

$$\mu\colon \qquad H^*(X) \otimes_R H^*(X) \xrightarrow{\times} H^*(X \times X) \xrightarrow{\text{diag}} H^*(X)$$

induziert die H-Raum-Multiplikation ν also einen Homomorphismus

$$\Delta\colon \qquad H^*(X) \xrightarrow{\nu} H^*(X \times X) \xrightarrow{\times^{-1}} H^*(X) \otimes H^*(X)\,,$$

von graduierten Algebren und $H^*(X)$ wird mit μ und Δ eine graduierte, graduiert kommutative Bialgebra. Die Eins ist induziert durch $X \to \{*\}$, die Koeins durch $\{*\} \mapsto x_0 \in X$.
Ist X zusammenhängend, so ist auch $H^*(X)$ zusammenhängend.

(ii) Ist X zusätzlich eine H-Gruppe mit Inversenbildung $\text{inv}\colon X \to X$, so wird $(H^*(X), \mu, \Delta)$ eine Hopfalgebra mit Antipode

$$H^*(X) \xrightarrow{\text{inv}^*} H^*(X).$$

(iii) Für einen beliebigen topologischen Raum Y, dessen Homologie in jedem Grad frei und endlich erzeugt ist, ist $H_*(X)$ eine Koalgebra und als solche zu $H^*(X)$ dual wegen Lemma 1.35.

(iv) Es sei X ein H-Raum bzw. eine H-Gruppe, so dass die Homologie von X in jedem Grad frei und endlich erzeugt ist. Dann ist $H_*(X)$ nach 1.35 eine zu $H^*(X)$ duale Bi- bzw. Hopfalgebra.

Beweisidee. (siehe [9, 3.C]) Man sieht (i) und (ii) durch Vergleichen der entsprechenden (Homotopie-) kommutativen Diagramme für H-Räume und Kohomologie von X. Ist X zusammenhängend, so ist $H^0(X; R) \cong H^0(*; R)$ und Eins und Koeins sind Isomorphismen. □

Unter guten Bedingungen ist die Homologie des freien H-Raumes auf X die freie von $\tilde{H}_*(X)$ erzeugte Algebra:

Lemma 4.11. Ist $H_*(X)$ eine freie abelsche Gruppe, so ist

$$H_*(JX) \cong T_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_*(X))$$

als graduierte unitäre Algebra. Dabei bezeichnet $T_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_*(X))$ die Tensoralgebra von $\tilde{H}_*(X)$ [9, S.288]. □

Definition 4.12. (siehe [9, S.282]) Es sei $\mathbb{C}P^\infty = \mathrm{colim}_{n\to\infty}\mathbb{C}P^n$ der unendlichdimensionale komplexe projektive Raum. Elemente in $\mathbb{C}P^\infty$ sind Geraden in $\mathbb{C}^\infty$ durch den Ursprung.
Der topologische Raum $\mathbb{C}P^\infty$ besitzt eine H-Raum-Struktur: Es seien $v, w \in \mathbb{C}P^\infty$ zwei Geraden mit $x := (x_0, ..., x_n) \in v \setminus \{0\}$ und $y := (y_0, ..., y_m) \in w \setminus \{0\}$. Die Koordinaten von x und y definieren Polynome $\sum_{i=0}^n x_i X^i, \sum_{i=0}^m y_i X^i \in \mathbb{C}[X]$.
Das Produkt dieser Polynome ist ein Polynom $\sum_{i=0}^{n+m} z_i X^i \neq 0$, und wir definieren $v \cdot w$ als die Ursprungsgerade durch den Punkt $(z_0, ..., z_{n+m})$.
Man sieht schnell, dass dies eine wohldefinierte, stetige Abbildung $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ liefert. Diese Abbildung ist assoziativ und kommutativ, die Gerade durch (1) ist offensichtlich ein neutrales Element für diese Multiplikation. Also ist $\mathbb{C}P^\infty$ ein kommutatives topologisches Monoid.

Satz 4.13. Es gibt einen Isomorphismus von Hopfalgebren

$$J_N \colon H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \to \mathrm{NSymm}$$

und damit auch einen Isomorphismus $J_Q = (J'_N)^{-1} \colon H^*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \to \mathrm{QSymm}$.
Dabei ist $J_N(H_{2i}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) = \mathrm{NSymm}_i$ und $J_Q(H^{2i}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)) = \mathrm{QSymm}_i$. Verdoppeln wir also die Grade in NSymm und QSymm, so erhalten wir Isomorphismen von graduierten Hopfalgebren.

Beweis. (siehe [3]) Es ist bekanntlich $H_i(\mathbb{C}P^\infty)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ in geraden nichtnegativen Graden und 0 sonst. Wir können Lemma 4.11 anwenden und erhalten

$$H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \cong T_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty))$$

als Algebra. Es sei $b_i \in H_{2i}(\mathbb{C}P^\infty)$ ein Erzeuger von $H_{2i}(\mathbb{C}P^\infty)$ und β_i das entsprechende Element in $T_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty))$. Um die Komultiplikation Δ zu bestimmen, nutzen wir, dass Δ ein Homomorphismus von Algebren ist und $T_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty))$ als Algebra von den β_i erzeugt wird.

Die Algebra $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$ ist zur Koalgebra $H_*(\mathbb{C}P^\infty)$ dual, und es ist $H^*(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}[x]$ mit $x^i \in H^{2i}(\mathbb{C}P^\infty)$ dual zu b_i, also $\langle x^j, b_i\rangle := x^j(b_i) := \delta_{j,i}$. Folglich gilt für die Komultiplikation $\Delta_{\mathbb{C}P^\infty}$ in $H_*(\mathbb{C}P^\infty)$

$$\langle x^j \otimes x^k, \Delta_{\mathbb{C}P^\infty}(b_i)\rangle = \langle x^j x^k, b_i\rangle = \langle x^{j+k}, b_i\rangle = \delta_{j+k,i}$$

und damit $\Delta_{\mathbb{C}P^\infty}(b_i) = \sum_{s=0}^i b_s \otimes b_{i-s}$.
Da die Komultiplikationen in $H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)$ und $H_*(\mathbb{C}P^\infty)$ durch Dualisieren des Cupproduktes entstehen und daher natürlich sind, kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \arrow[r, "\Delta"] & H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \otimes H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \\ H_*(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[u, "i_*"] \arrow[r, "\Delta_{\mathbb{C}P^\infty}"] & H_*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H_*(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[u, "i_*"] \end{tikzcd}$$

und es ist $\Delta(\beta_i) = \sum_{s=0}^i \beta_s \otimes \beta_{i-s}$. Da $T_\mathbb{Z}(\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty))$ im Grad 0 gerade $\mathbb{Z}$ ist, ist die Koeins gegeben durch $\beta_i \mapsto 0$ für $i \geq 1$ und $\beta_0 := 1 \mapsto 1$.
Andererseits ist für die so definierte Bialgebrastruktur auf $T_\mathbb{Z}(\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty))$ die Abbildung

$$T_\mathbb{Z}(\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty)) \to \mathrm{NSymm}, \quad \beta_i \mapsto Z_i$$

offensichtlich ein Isomorphismus von Bialgebren. Nach Bemerkung 1.21 ist

$$J_N\colon \qquad H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \xrightarrow{\cong} T_\mathbb{Z}(\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{NSymm}$$

also ein Isomorphismus von Hopfalgebren. Mit 4.10 und 1.35 folgt auch die behauptete Isomorphie zwischen $H^*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)$ und QSymm. $\square$

4.3 Das Diamantprodukt auf Räumen und auf singulärer Homologie

Nun definieren wir das Diamantprodukt $\diamond$, die Abbildung, deren induzierte Abbildung auf Kohomologie wir mit dem zweiten Koprodukt auf QSymm vergleichen wollen.
Konstruktion und Eigenschaften von $\diamond$ sind [3] entnommen.

Ist X ein beliebiger H-Raum, so gibt es neben der üblichen Verkettung von Schleifen in $\Omega\Sigma X$ noch eine zweite Möglichkeit, aus zwei Schleifen eine dritte zu konstruieren: Wir definieren mithilfe der beiden Schleifen eine Schleife in $\Sigma(X \wedge X)$ und nutzen dann die H-Raum-Struktur von X, um wieder nach ΣX abzubilden. Dies geschieht über die Hopfkonstruktion:

Definition 4.14. (i) Der Join zweier punktierter Räume (X, x_0) und (Y, y_0) ist definiert als

$$X * Y := X \times I \times Y/\sim$$

mit Relationen $(x, 0, y) \sim (x', 0, y)$, $(x, 1, y) \sim (x, 1, y')$ und $(x_0, t, y_0) \sim (x_0, 0, y_0)$ sowie Basispunkt $(x_0, 0, y_0)$ [25, S.81].

(ii) Selick zeigt in [25, S.84], dass $X * Y$ homotopieäquivalent zu $\Sigma(X \wedge Y)$ ist, wenn $\{x_0\} \subset X$ und $\{y_0\} \subset Y$ abgeschlossen sind, also beispielsweise wenn X und Y hausdorffsch sind.
Genauer zeigt er, dass die basispunkterhaltende Abbildung

$$\Phi\colon \Sigma(X \wedge Y) \to X * Y, \quad [e^{2\pi i t}, x, y] \mapsto \begin{cases} (x, 3t, y_0) & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ (x, 2-3t, y) & \text{falls } \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ (x_0, 3t-2, y) & \text{falls } \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

eine Homotopieäquivalenz ist.

(iii) Es sei $f\colon X \times Y \to Z$ eine stetige Abbildung punktierter Räume. In Anlehnung an die leider nicht wohldefinierte Hopfkonstruktion aus [29, S.502] definieren wir die Hopfkonstruktion auf f als

$$\mathcal{H}(f)\colon X * Y \to \Sigma Z, \quad (x, t, y) \mapsto [e^{2\pi i t}, f(x, y)].$$

Man rechnet leicht nach, dass $\mathcal{H}(f)$ eine wohldefinierte, stetige Abbildung von punktierten Räumen ist.

Definition 4.15. Es sei (X, x_0) ein H-Raum mit Multiplikation ν. Das Diamantprodukt

$$\diamond\colon \Omega\Sigma X \times \Omega\Sigma X \to \Omega\Sigma X$$

ist für zwei Schleifen β, $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \Sigma X = \mathbb{S}^1 \wedge X$ definiert durch

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[drr, "\beta\diamond\gamma"'] & \mathbb{S}^1 \wedge X \arrow[r, "\beta\wedge\mathrm{id}"] & \mathbb{S}^1 \wedge X \wedge X \arrow[d, "\Phi"] \\ & & X * X \arrow[d, "\mathcal{H}(\nu)"] \\ & & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Wir fassen die elementaren Eigenschaften von $\diamond$ zusammen, die wir benötigen.

Lemma 4.16. (i) Es ist $c_{x_0} \diamond \gamma = c_{x_0} = \gamma \diamond c_{x_0}$ für alle $\gamma \in \Omega\Sigma X$. Insbesondere induziert $\diamond$ eine Abbildung

$$\Omega\Sigma X \wedge \Omega\Sigma X \to \Omega\Sigma X,$$

die wir ebenfalls mit $\diamond$ bezeichnen.

(ii) Die Abbildung $\diamond$ ist stetig.

(iii) Für einfache Schleifen i_x und i_y ist

$$i_x \diamond i_y = i_{\nu(x,x_0)} * \left(i_{\nu(x,y)}\right)^{-1} * i_{\nu(x_0,y)}.$$

Beweis. (vergleiche [3]) (i) Für $t \in \mathbb{S}^1$ ist $[t, c_{x_0}(t), \gamma(t)] = [t, x_0, \gamma(t)]$ der Basispunkt in $\mathbb{S}^1 \wedge X \wedge X$ und wird von $\mathcal{H}(\nu) \circ \Phi$ auf $[t, x_0]$ in ΣX abgebildet.
(ii) Wegen (i) genügt es, $\diamond$ auf $\Omega\Sigma X \wedge \Omega\Sigma X$ zu untersuchen. Betrachte zuerst

$$g\colon \Omega\Sigma X \wedge \Omega\Sigma X \to \Omega\Sigma(X \wedge X), \quad [\beta, \gamma] \mapsto (t \mapsto [t, \beta(t), \gamma(t)]).$$

Diese Abbildung ist genau dann stetig, wenn

$$\mathbb{S}^1 \wedge \Omega\Sigma X \wedge \Omega\Sigma X \to \Sigma(X \wedge X), \quad [t,\beta,\gamma] \mapsto [t,\beta(t),\gamma(t)]$$

stetig ist [29, S.107]. Letztere Abbildung ist aber gerade die obere Abbildung im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^1 \wedge \Omega\Sigma X \wedge \Omega\Sigma X \arrow[rr] \arrow[d, "\mathrm{triag}\wedge\mathrm{id}\wedge\mathrm{id}"] & & \Sigma(X \wedge X) \\
\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1 \wedge \Omega\Sigma X \wedge \Omega\Sigma X \arrow[rr, "T"] & & \mathbb{S}^1 \wedge \Omega\Sigma X \wedge \mathbb{S}^1 \wedge \Omega\Sigma X \wedge \mathbb{S}^1 \arrow[u, "\mathrm{id}\wedge\mathrm{ev}\wedge\mathrm{ev}"']
\end{tikzcd}$$

wobei triag ein $t \in \mathbb{S}^1$ auf $[t,t,t]$ abbildet, T die passende Vertauschung bezeichnet und ev die Auswertungabbildung ist.
Da $\diamond = \Omega(\mathcal{H}(\nu)) \circ \Omega(\Phi) \circ g$ ist, ist auch $\diamond$ stetig.
(iii) Dies folgt sofort durch einfaches Ausrechnen. $\square$

Betrachten wir nun den H-Raum $X = \mathbb{C}P^\infty$, so erhalten wir eine induzierte Abbildung

$$H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \otimes H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \xrightarrow{\times} H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty \times \Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \xrightarrow{\diamond} H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)$$

auf Homologie und wegen Satz 4.13 eine Abbildung

$$\diamond_N \colon \mathrm{NSymm} \otimes \mathrm{NSymm} \xrightarrow{(J_N \otimes J_N)^{-1}} H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \otimes H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \longrightarrow H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \xrightarrow{J_N} \mathrm{NSymm}.$$

Mithilfe des folgenden Lemmas und gewissen Distributivitätseigenschaften (im Hopfalgebrasinne) von $\diamond_N$ (siehe [3]) lässt sich das Diamantprodukt in NSymm berechnen.

Lemma 4.17. (i) Ist $x \in \mathrm{NSymm}$ von positivem Grad, so ist

$$1 \diamond_N x = 0 = x \diamond_N 1.$$

(ii) Für $i, j \geq 1$ ist

$$Z_i \diamond_N Z_j = \sum_{a=0}^{i} \sum_{b=0}^{j} \binom{a+b}{a} Z_{i-a} \chi_N(Z_{a+b}) Z_{j-b}.$$

Beweis. (vergleiche [3]) (i) Bezeichne $\mathrm{inc} \colon * \to \Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion des Basispunktes. Dann ist $1 \otimes x \in \mathrm{Im}(\mathrm{inc}_* \otimes \mathrm{id})$. Nach Lemma 4.16 kommutiert

$$\begin{tikzcd}
H_*(*) \otimes H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \arrow[r, "\mathrm{inc}_*\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\times"] & H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \otimes H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \arrow[d, "\times"] & \\
H_*(* \times \Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \arrow[r, "(\mathrm{inc}\times\mathrm{id})_*"] \arrow[d] & H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty \times \Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \arrow[r, "\diamond_*"] \arrow[d] & H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \\
H_*(* \wedge \Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \arrow[r, "(\mathrm{inc}\times\mathrm{id})_*"] & H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty \wedge \Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \arrow[ur, "\diamond_*"] &
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung faktorisiert also für Elemente der obigen Form über $H_*(* \wedge \Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) = H_*(*)$, also ist $1 \diamond x \in H_0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)$. Ist x von positivem Grad, so ist andererseits auch

$1\diamond_N$ von positivem Grad. Das einzige Element, das in zwei Graden liegt, ist aber die 0.
(ii) Der rechtsäußere Weg in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H_*(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "i_* \otimes i_*"] & H_*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \arrow[r, "\mathrm{diag}_*^{\times 2}"] & H_*(\mathbb{C}P^{\infty \times 4}) \arrow[d, "(\mathrm{id} \times \nu \times \mathrm{id})_*"] \\
H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \otimes H_*(\Omega\Sigma X) \arrow[d, "\times"] & & H_*(\mathbb{C}P^{\infty \times 3}) \arrow[d, "(i \times i \times i)_*"] \\
H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty \times 2}) \arrow[d, "\diamond_*"] & & H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty \times 3}) \arrow[d, "(\mathrm{id} \times \mathrm{inv} \times \mathrm{id})_*"] \\
H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) & & H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty \times 3}) \arrow[ll, "*_*"']
\end{tikzcd} ,$$

entspricht dem rechten Ausdruck in Lemma 4.16.(iii), denn es ist $\nu(-, x_0) \times \nu \times \nu(x_0, -)$ homotop zu $\mathrm{id} \times \nu \times \mathrm{id}$. Die Verkettung der linken Abbildungen entspricht dem linken Ausdruck, das Diagramm kommutiert also.
Nach Lemma 4.10 induziert die Diagonalabbildung auf $\mathbb{C}P^\infty$ die Komultiplikation von $H_*(\mathbb{C}P^\infty)$, die wir im Beweis von 4.13 bestimmt haben. Die Inversion von Schleifen in $\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty$ entspricht der Antipode auf $H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathrm{NSymm}$. Schließlich kann man zeigen, dass die durch die H-Raum-Multiplikation ν von $\mathbb{C}P^\infty$ auf Kohomologie induzierte Komultiplikation Erzeuger x auf $x \otimes 1 + 1 \otimes x$ abbildet, und dass daher die dazu duale Multiplikation auf $H_*(\mathbb{C}P^\infty)$ gegeben ist durch $b_r \otimes b_s \mapsto \binom{r+s}{r} b_{r+s}$ für Erzeuger b_k von $H_{2k}(\mathbb{C}P^\infty)$ (vergleiche [9, S.291]).
Damit berechnet sich $Z_i \diamond Z_j = \diamond_* \circ \times \circ (i_* \otimes i_*)(b_i \otimes b_j)$ wie angegeben. $\square$

Dualisieren liefert schließlich das Koprodukt auf QSymm, das wir im Folgenden untersuchen wollen:

Definition 4.18. [3] Wir erhalten eine Abbildung $\diamond_Q$ durch

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{QSymm} \arrow[rrr, "\diamond_Q"] \arrow[d, "\cong"] & & & \mathrm{QSymm} \otimes \mathrm{QSymm} \\
\mathrm{NSymm}' \arrow[r, "\diamond_N'"] & (\mathrm{NSymm} \otimes \mathrm{NSymm})' \arrow[rr, "\cong"] & & \mathrm{NSymm}' \otimes \mathrm{NSymm}' \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Genauer ist für Kompositionen α mit der Notation aus 1.36

$$\diamond_Q(M_\alpha) := \sum_{\beta,\gamma \text{ Kompositionen}} \langle Z_\beta \diamond_N Z_\gamma, M_\alpha \rangle M_\beta \otimes M_\gamma$$

Man sieht leicht, dass $\diamond_Q = J_Q \circ \diamond^* \circ (J_Q \otimes J_Q)^{-1}$ ist.

5 Das Diamantprodukt und das zweite Koprodukt

5.1 K-Theorie

Wir haben in Abschnitt 4 zwei zusätzliche Koprodukte auf QSymm kennengelernt, das über Matrizen definierte Koprodukt $\tilde{\Delta}_Q$ und das von $\diamond$ auf QSymm $\cong H^*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)$ induzierte Koprodukt $\diamond_Q$. Diese Koprodukte stimmen offenbar nicht überein, denn $\tilde{\Delta}_Q$ bildet QSymm_n auf $\mathrm{QSymm}_n \otimes \mathrm{QSymm}_n$ ab, $\diamond_Q$ hingegen respektiert als induzierte Abbildung die Graduierung auf QSymm.
Eine ähnliche Situation finden wir für Symm $\cong H^*(BU)$: Es gibt Abbildungen

$$\mu_\oplus, \mu_\otimes \colon BU \times BU \to BU,$$

und $\mu_\oplus$ induziert auf Symm die gewöhnliche Komultiplikation Δ_S. Baker und Richter zeigen in [3], dass die von $\mu_\otimes$ auf Symm induzierte Komultiplikation $H^*(\mu_\otimes)$ wiederum die Multiplikation auf $\Lambda = \mathbf{Rings}(\mathrm{Symm}, -)$ induziert. Dasselbe gilt aber für $\tilde{\Delta}_S = \tilde{\Delta}_Q|_{\mathrm{Symm}}$. Es stellt sich also die Frage, wie $H^*(\mu_\otimes)$ und $\tilde{\Delta}_S$ zusammenhängen.
Die 0-te K-Theorie $K^0(BU)$ von BU ist isomorph zur Algebra der Potenzreihen in abzählbar vielen kommutierenden Unbestimmten $\mathbb{Z}[[c_1, c_2, ...]]$ (siehe [28, S.395]), und man kann die charakteristischen Klassen c_i mit den elementarsymmetrischen Funktionen z_i identifizieren [21, S.194f]. In [3] wird angedeutet, dass $\tilde{\Delta}_S$ eher der von $\mu_\otimes$ induzierten Abbildung $K^0(\mu_\otimes)$ auf $K^0(BU)$ statt $H^*(\mu_\otimes)$ entspricht. Wir versuchen daher in diesem Abschnitt, die von $\diamond$ auf $K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)$ induzierte Abbildung mit $\tilde{\Delta}_Q$ zu vergleichen.
Zunächst fassen wir die im Folgenden benötigten Tatsachen über K-Theorie zusammen, dann konstruieren wir eine Abbildung, welche singuläre Kohomologie mit K-Theorie verbindet. Mithilfe dieser Abbildung versuchen wir dann einen Vergleich.
Wer einen Einstieg in K-Theorie als Grothendieckgruppe von Vektorbündeln sucht, wird in [1] und in dem nicht als Buch veröffentlichtem, aber frei zugänglichem Manuskript [10] fündig. Zieht man den abstrakteren, hier benötigten Rahmen einer über ein Spektrum definierten Kohomologietheorie vor, so seien [28] und [21] empfohlen.

Definition 5.1. Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $\mathrm{Vect}(X)$ die Menge der Isomorphieklassen endlichdimensionaler Vektorbündel über X. Die Summe $\oplus$ macht $\mathrm{Vect}(X)$ zu einem abelschen Monoid. Die 0-te K-Theorie $K^0(X)$ von X ist definiert als Quotient

$$F(\mathrm{Vect}(X))/U$$

dabei ist $F(\mathrm{Vect}(X))$ die freie abelsche Gruppe auf $\mathrm{Vect}(X)$ und $U \subset F(\mathrm{Vect}(X))$ die von Elementen der Form $p + q - (p \oplus q)$, $p, q \in \mathrm{Vect}(X)$ erzeugte Untergruppe.
Die abelsche Gruppe $K^0(X)$ ist mit der durch das Tensorpodukt von Vektorbündeln induzierten Multiplikation ein kommutativer Ring [1].

Bemerkung 5.2. Betrachte den klassifizierenden Raum $BU = \mathrm{colim} BU(n)$ von $U = \mathrm{colim} U(n)$, also den direkte Limes $BU := \mathrm{colim} G_n(\mathbb{C}^\infty)$ der Grassmannschen Mannigfaltigkeiten.
Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Vektorbündel $\gamma_n \colon E_n \to BU(n)$, so dass man jedes n-dimensionale Vektorbündel über beliebigem parakompakten X als Pullback $f^*\gamma_n$ bezüglich einer stetigen Abbildung $f \colon X \to BU(n)$ erhält [21, S.193]. Ist X kompakt, so liegt

das Bild jeder stetigen Abbildung $X \to BU$ bereits in einem $BU(n)$, die Abbildung entspricht also einem endlichdimensionalen Vektorbündel.
Der Raum BU ist bis auf Homotopie ein Ring, das heißt es gibt Abbildungen $\mu_\oplus, \mu_\otimes\colon BU \times BU \to BU$, so dass für $(BU, \mu_\oplus, \mu_\otimes)$ die definierenden Diagramme einer Ringstruktur bis auf Homotopie kommutieren.
Diese Ringstruktur liefert wiederum für beliebiges X eine (in X natürliche) Ringstruktur auf der Menge $[X, BU \times \mathbb{Z}]$ der Homotopieklassen von Abbildungen $X \to BU \times \mathbb{Z}$ [28, S.207ff, S.298ff]. Man kann zeigen, dass für kompaktes X

$$K^0(X) \cong [X, BU \times \mathbb{Z}]$$

als Ring ist [21, S.200].

Wie die Notation K^0 vermuten lässt, kann man allgemeiner abelsche Gruppen $K^n, n \in \mathbb{Z}$, konstruieren, so dass K^* eine verallgemeinerte Kohomologietheorie ist:

Definition 5.3. Es sei X ein punktierter CW-Komplex. Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir die reduzierte K-Theorie von X durch

$$\tilde{K}^{2n}(X) := [X, BU \times \mathbb{Z}]_0, \quad \tilde{K}^{2n+1}(X) := \tilde{K}^{2n}(\Sigma X).$$

Dabei bezeichnet $[X, BU \times \mathbb{Z}]_0$ die Menge der Homotopieklassen stetiger basispunkterhaltender Abbildungen von X nach $BU \times \mathbb{Z}$.
Ist (X, A) ein Paar von CW-Komplexen, so definieren wir die (unreduzierte) K-Theorie von (X, A) für $n \in \mathbb{Z}$ durch

$$K^n(X, A) := \tilde{K}^n(X/A)$$

wobei $X/\emptyset := X \sqcup *$ sei und wir kurz $K^n(X) := K^n(X, \emptyset)$ schreiben.

Satz 5.4. (i) Die Gruppen K^n bilden eine unreduzierte Kohomologietheorie: Jedes K^n ist ein kontravarianter Funktor, zueinander homotope Abbildungen auf Räumen induzieren die gleiche Abbildung auf K-Theorie, es gibt zu jedem Paar (X, A) von CW-Komplexen eine (natürliche) lange exakte Sequenz wie in singulärer Kohomologie, und das Ausschneidungsaxiom ist erfüllt.
Ebenso ist $\tilde{K}^*$ eine reduzierte Kohomologietheorie: $\tilde{K}^n$ ist ein kontravarianter Funktor, zueinander homotope Abbildungen auf Räumen induzieren die gleiche Abbildung auf reduzierter K-Theorie, es gibt einen natürlichen Isomorphismus $\tilde{K}^n(\Sigma X) \cong \tilde{K}^{n+1}(X)$ und für jedes Tripel $(X, A, \{x_0\})$ ist die Sequenz

$$\tilde{K}^n(X \cup CA) \to \tilde{K}^n(X) \to \tilde{K}^n(A)$$

exakt. Zusätzlich erfüllt $\tilde{K}^*$ das Bouquet-Axiom: Ist $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie punktierter CW-Komplexe, so ist

$$\prod_i {j_i}^*\colon K^n(\bigvee_i X_i) \to \bigoplus_i K^n(X_i).$$

ein Isomorphismus[28].

(ii) Die direkte Summe $K^*(X)$ der $K^n(X)$ ist ein graduierter, kommutativer Ring mit Eins, und $\tilde{K}^*(X) = \ker(X \to *)^* \subset K^*(X)$ ist ein Ideal in $K^*(X)$. Stetige Abbildungen zwischen CW-Komplexen induzieren Ringhomomorphismen. [28, Ch.13] □

Ist X parakompakt, also zum Beispiel ein CW-Komplex, so definiert nach 5.2 immer noch jedes Vektorbündel über X ein Element in $K^0(X)$. Es hat aber nicht mehr zwingend jede Abbildungen $X \to BU$ ihr Bild bereits in einem $BU(n)$, wir erhalten also eventuell auch Abbildungen, die keinem endlichdimensionalen Vektorbündel entsprechen.

Definition 5.5. Setze $E_1 := \{(x, v) \in \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}^\infty | v \in x\}$. Die Abbildung

$$\gamma := \gamma_1 \colon E_1 \to \mathbb{C}P^\infty, \quad (x, v) \mapsto x$$

ist ein eindimensionales Vektorbündel, genannt kanonisches Geradenbündel über $\mathbb{C}P^\infty$ [10, S.28].

Satz 5.6. (siehe [10, S.78]) Es sei $x \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ ein Erzeuger. Dann gibt es genau eine Familie von Funktionen $c_n \colon \mathrm{Vect}(X) \to H^{2i}(X; \mathbb{Z}), n \in \mathbb{N}$, für jeden parakompakten Raum X , so dass für alle endlichdimensionalen Vektorbündel $E \to X, \tilde{E} \to X$ gilt:

(i) Es ist $c_1(\gamma) = x$.

(ii) Für jede stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ und alle n ist $c_n(f^*(E)) = f^*(c_n(E))$.

(iii) Es gilt $c_n(E) = 0$ für alle $n > \dim E$.

(iv) Mit $c(E) := 1 + \sum_{n=1}^\infty c_n(E)$ ist $c(E \oplus \tilde{E}) = c(E)c(\tilde{E})$ in $H^*(X)$.

Die c_n heißen charakteristische Klassen. □

Lemma 5.7. Für jeden endlichen CW-Komplex X gilt: Es gibt genau einen natürlichen Homomorphismus graduierter Ringe $\mathrm{ch} : K^0(X) \to H^*(X; \mathbb{Q})$ mit

$$\mathrm{ch}(L) = e^{c_1(L)}$$

für alle eindimensionalen Vektorbündel $L \to X$, genannt Cherncharakter.
Setzen wir $H^{ev}(X; \mathbb{Q}) := \bigoplus_{n=0}^\infty H^{2n}(X; \mathbb{Q})$, so ist die ebenfalls mit ch bezeichnete Abbildung

$$K^0(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{ev}(X; \mathbb{Q}), \quad x \otimes r \mapsto r\mathrm{ch}(x)$$

ein Isomorphismus von Ringen (siehe [10, S.100ff], sehr lesenswert ist auch die allgemeinere Definition in [21]). □

Wir wollen den Cherncharakter für unseren Vergleich zwischen Diamant- und zweitem Koprodukt auf QSymm nutzen. Da $\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty$ aber kein endlichdimensionaler CW-Komplex ist, ist der Cherncharakter für $\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty$ nicht definiert.
Das erste Problem ist hierbei die nichtverschwindende Kohomologie: Ist X nicht endlich, so ist $e^{c_1(L)}$ kein Element von $H^*(X)$, wenn $c_1(L)$ nicht nilpotent ist - und in Polynomringen über $\mathbb{Z}$ gibt es kein einziges nilpotentes Element, in $H^*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \cong$ QSymm also auch nicht. Diese Schwierigkeit lässt sich aber leicht umgehen: Wir betrachten statt $H^*(X; \mathbb{Q})$ einfach die Komplettierung

$$H^{\pi,*}(X; \mathbb{Q}) := \prod_{i=0}^\infty H^i(X; \mathbb{Q}),$$

also den Ring der Potenzreihen in einer Variable mit i-tem Koeffizienten aus $H^i(X; \mathbb{Q})$. Verschwindet die Kohomologie von X in hohen Graden, so stimmen $H^*(X; \mathbb{Q})$ und $H^{\pi,*}(X; \mathbb{Q})$ überein.
Das zweite Problem ist, dass für den Beweis, dass ch ein Ringisomorphismus ist, das Spaltungsprinzip für K-Theorie von kompakten Räumen wesentlich ist (siehe [10, S.63]). Dieses Problem lässt sich nicht ganz so einfach beseitigen. Glücklicherweise besitzt $J\mathbb{C}P^\infty$ eine recht einfache CW-Struktur, so dass wir den gewünschten Cherncharakter für $\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty \sim J\mathbb{C}P^\infty$ aus den Cherncharakteren der Skelette konstruieren können:

Lemma 5.8. Es gibt eine CW-Struktur auf $J\mathbb{C}P^\infty$, so dass das n-Skelett $J\mathbb{C}P^{\infty(n)}$ von $J\mathbb{C}P^\infty$ für beliebiges n aus endlich vielen Zellen besteht und keine Zellen in ungeraden Graden besitzt.

Beweis. Der CW-Komplex $\mathbb{C}P^\infty$ besteht aus je einer Zelle e_{2i} in jedem geraden Grad $2i \geq 0$. Folglich besitzt auch $\mathbb{C}P^{\infty k}$ nur Zellen in geraden Graden. Genauer sind die Zellen im Grad $2n$ von $\mathbb{C}P^{\infty k}$ gegeben durch Produkte $e_{2i_1} \times .... \times e_{2i_k}$ mit $\sum i_j = n$. Die $2n$-Zellen von $\bigsqcup_{k\geq 0} \mathbb{C}P^{\infty k}$ stehen also in Bijektion mit Tupeln $(i_1, ..., i_k) \in \mathbb{N}_0^k$ mit $\sum i_j = n$.
Die James-Konstruktion $J\mathbb{C}P^\infty$ ist der Quotient von $\bigsqcup_{k\geq 0} \mathbb{C}P^{\infty k}$ bezüglich der Äquivalenzrelation, die Tupel von Elementen aus $\mathbb{C}P^\infty$ identifiziert, wenn sie durch Hinzufügen oder Weglassen des Basispunktes ineinander überführbar sind. Der Basispunkt ist aber gerade die 0-Zelle e_0. Die Produkte $e_{2i_1} \times .... \times e_{2i_k}$ und $e_{2j_1} \times .... \times e_{2j_l}$ definieren also genau dann dieselbe Zelle in $J\mathbb{C}P^\infty$, wenn die durch Streichung der 0 aus $(i_1, ..., i_k)$ und $(j_1, ..., j_l)$ erhaltenen Kompositionen gleich sind.
Damit ergibt sich: $J\mathbb{C}P^\infty$ besitzt keine Zellen ungerader Dimension, und die $2n$-Zellen von $J\mathbb{C}P^\infty$ sind indiziert über Kompositionen von n. Insbesondere gibt es nur endlich viele $2n$-Zellen. □

Betrachten wir die Inklusionen $i_n \colon J\mathbb{C}P^{\infty(n)} \to J\mathbb{C}P^{\infty(n+1)}$, so kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "i_{n+1}^*\otimes \mathrm{id}"] & K^0(J\mathbb{C}P^{\infty(n+1)}) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, "i_n^*\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{ch}"] & K^0(J\mathbb{C}P^{\infty(n)}) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, "i_{n-1}^*\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{ch}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "i_{n+1}^*"] & H^{ev}(J\mathbb{C}P^{\infty(n+1)}; \mathbb{Q}) \arrow[r, "i_n^*"] & H^{ev}(J\mathbb{C}P^{\infty(n)}; \mathbb{Q}) \arrow[r, "i_{n-1}^*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

wegen der Natürlichkeit des Cherncharakters. Die Cherncharaktere zu $J\mathbb{C}P^{\infty(n)}$ definieren also einen Morphismus der in den beiden Zeilen des Diagramms abgebildeten inversen Systeme und induzieren daher einen Ringhomomorphismus

$$\mathrm{ch}_{\lim} := \varprojlim \mathrm{ch} \colon \varprojlim (K^0(J\mathbb{C}P^{\infty(n)}) \otimes \mathbb{Q}) \to \varprojlim H^{ev}(J\mathbb{C}P^{\infty(n)}; \mathbb{Q}).$$

Da ch für jedes $J\mathbb{C}P^{\infty(n)}$ ein Isomorphismus ist, ist auch $\mathrm{ch}_{\lim}$ ein Isomorphismus. Es bleibt die Aufgabe, Definitions- und Bildbereich von $\mathrm{ch}_{\lim}$ zu identifizieren, also die inversen Limiten der beiden Systeme zu bestimmen - in der Hoffnung, dass wir einen Cherncharakter auf $J\mathbb{C}P^\infty$ konstruiert haben.

Lemma 5.9. Es sei X ein CW-Komplex, der in jedem geraden Grad nur endlich viele Zellen besitzt und keine Zellen in ungeraden Graden. Weiter bezeichne $j_n \colon X^{(n)} \to X$ die Inklusion. Für die inversen Systeme

$$\cdots \xrightarrow{i_{n+1}^*\otimes \mathrm{id}} K^0(X^{(n+1)}) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{i_n^*\otimes \mathrm{id}} K^0(X^{(n)}) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{i_{n-1}^*\otimes \mathrm{id}} \cdots$$

und

$$\cdots \xrightarrow{i_{n+1}^*} H^*(X^{(n+1)}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{i_n^*} H^*(X^{(n)}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{i_{n-1}^*} \cdots$$

ist

$$L_K \colon K^0(X) \otimes \mathbb{Q} \to \varprojlim (K^0(X^{(n)}) \otimes \mathbb{Q}), \quad x \otimes q \mapsto (j_n^*(x) \otimes q)_{n\geq 0}$$

injektiv und

$$L_H\colon H^{\pi,*}(X;\mathbb{Q}) \cong \varprojlim H^*(X^{(n)};\mathbb{Q}), \quad x \mapsto (j_n^*(x))_{n\geq 0}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Zuerst beweisen wir die zweite Behauptung. Die Abbildung L_H ist wegen $j_{n+1} \circ i_n = j_n$ wohldefiniert. Betrachte

$$j_n^*\colon H^{\pi,*}(X^{(n+1)}) \to H^*(X^{(n)}).$$

Da X nur Zellen in geraden Graden besitzt, ist $X^{2n} = X^{2n+1}$ und $j_{2n} = j_{2n+1}$ für alle n. Für einen beliebigen CW-Komplex Y induziert die Inklusion $Y^{(k)} \to Y$ einen Isomorphismus $H_k(Y^{(n)}) \to H_k(Y)$ für $k < n$ [9, S.137]. Folglich ist $H_k(j_{2n}) = H_k(j_{2n+1})$ ein Isomorphismus für $k \leq 2n$ und die Nullabbildung für $k > 2n$. Insbesondere verschwinden singuläre Homologie und Kohomologie von X in ungeraden Graden, und $H_*(X^{(n)})$ ist frei und endlich erzeugt. Damit ist auch $H^k(j_n) = \mathrm{Hom}(H_k(j_n), \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$ ein Isomorphismus für $k \leq n$ und die Nullabbildung sonst.
Ist also $x \in H^{\pi,*}(X;\mathbb{Q})$ mit $j_n^* x = 0$ für alle $n \geq 0$, so ist bereits $x = 0$ gewesen.
Zu zeigen bleibt die Surjektivität von L_H: Für $n, k \geq 0$ sei

$$\mathrm{pr}_k^{(n)}\colon H^*(X^{(n)};\mathbb{Q}) \to H^k(X^{(n)};\mathbb{Q})$$

die Projektion auf den k-ten Grad von $H^*(X^{(n)})$. Es sei $(y_n) \in \varprojlim H^*(X^{(n)};\mathbb{Q})$ vorgegeben. Da $H^n(j_n)$ ein Isomorphismus ist, können wir

$$x := (H^n(j_n)^{-1}\mathrm{pr}_n^{(n)}(y_n))_{n\geq 0} \in H^{\pi,*}(X;\mathbb{Q})$$

setzen. Damit ist für alle $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
j_n^* x &= \sum_{k=0}^{n} j_n^* H^k(j_k)^{-1}\mathrm{pr}_k^{(k)}(y_k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} j_n^* H^k(j_k)^{-1}\mathrm{pr}_k^{(k)} i_k^* \dots i_{n-1}^*(y_n)\\
&= \sum_{k=0}^{n} j_n^* H^k(j_k)^{-1} H^k(i_{n-1}\dots i_k)\mathrm{pr}_k^{(n)}(y_n)\\
&= \sum_{k=0}^{n} H^k(j_n) H^k(j_k)^{-1} H^k(i_{n-1}\dots i_k)\mathrm{pr}_k^{(n)}(y_n).
\end{aligned}$$

Nun ist aber $j_n i_{n-1} \dots i_k = j_k$, und $H^k(j_n)$ ist ein Isomorphismus. Folglich ist $H^k(i_{n-1}\dots i_k) = H^k(j_k)H^k(j_n)^{-1}$ und damit

$$j_n^* x = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{pr}_k^{(n)}(y_n) = y_n,$$

also $L_H(x) = (y_n)_{n\geq 0}$.
Um die erste Behauptung zu beweisen, betrachten wir zunächst das inverse System

$$\dots \xrightarrow{i_{n+1}^*} K^0(X^{(n+1)}) \xrightarrow{i_n^*} K^0(X^{(n)}) \xrightarrow{i_{n-1}^*} \dots$$

Ist n gerade, so ist $X^{(n)} = X^{(n+1)}$, also ist i_n die Identität. Für ungerades n betrachten wir die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow K^0(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \longrightarrow K^0(X^{(n+1)}) \xrightarrow{i_n^*} K^0(X^{(n)}) \longrightarrow K^1(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \longrightarrow \cdots$$

zum Paar $(X^{(n)}, X^{(n+1)})$: Es ist

$$\begin{aligned} K^1(X^{(n+1)}, X^{(n)}) &= \tilde{K}^1(X^{(n+1)}/X^{(n)}) \\ &\cong \tilde{K}^1(\bigvee_{i=1}^{l} \mathbb{S}^{n+1}) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{l} \tilde{K}^1(\mathbb{S}^{n+1}) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{l} \tilde{K}^1(\Sigma\mathbb{S}^{n}) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{l} \tilde{K}^0(\mathbb{S}^{n}). \end{aligned}$$

Nach [10, S.52] ist aber $\tilde{K}^0(\mathbb{S}^n) = 0$ für ungerades n, also ist i_n surjektiv.
Obiges inverses System erfüllt damit die Mittag-Leffler-Bedingung, und nach [16, S.123] ist $\lim\limits_{\leftarrow} K^0(X^{(n)}) = K^0(X)$. Genauer gilt: Ein Isomorphismus ist gegeben durch

$$\Phi\colon K^0(X) \to \lim_{\leftarrow} K^0(X^{(n)}), \quad x \mapsto (j_n^*(x))_{n\geq 0}.$$

Elemente in $\lim\limits_{\leftarrow}(K^0(X^{(n)}) \otimes \mathbb{Q})$ sind Tupel $(\sum_{i=1}^{m_n} x_i^{(n)} \otimes q_i^{(n)})_{n\geq 0}$ mit

$$\sum_{i=1}^{m_{n+1}} i_n^*(x_i^{(n+1)}) \otimes q_i^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{m_n} x_i^{(n)} \otimes q_i^{(n)}.$$

Betrachte nun L_K: Ist $\sum_{i=1}^{m} x_i \otimes q_i \in \ker L_K$, also

$$0 = \sum_{i=1}^{m} j_n^*(x_i) \otimes q_i = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{pr}_n \circ \Phi(x_i) \otimes q_i$$

für alle n, so muss schon $\sum_{i=1}^{m} x_i \otimes q_i = 0$ gewesen sein, denn nach [2] sind die $K^0(X^{(n)})$ und damit auch $K^0(X)$ freie $\mathbb{Z}$-Moduln, also ist auch $\Phi \otimes \mathrm{id}$ injektiv. Folglich haben wir eine Injektion $K^0(X) \otimes \mathbb{Q} \to \lim\limits_{\leftarrow}(K^0(X^{(n)}) \otimes \mathbb{Q})$ gefunden. □

Wir können also insbesondere für $X = J\mathbb{C}P^\infty$ definieren:

Definition 5.10. Es sei X ein Raum wie in Lemma 5.9. Der Cherncharakter von X ist die injektive Abbildung

$$\mathrm{ch} := L_H \circ \mathrm{ch}_{\lim} \circ L_K\colon K^0(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^{\pi,*}(X; \mathbb{Q}).$$

Bemerkung 5.11. (i) Tatsächlich ist dies die einzige Möglichkeit, eine Abbildung ch so zu definieren, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^0(X) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, "j_n^* \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{ch}"] & K^0(X^{(n)}) \otimes \mathbb{Q} \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\
H^{\pi,*}(X;\mathbb{Q}) \arrow[r, "j_n^*"] & H^*(X^{(n)};\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

für alle n kommutiert: Im Beweis von Lemma 5.9 haben wir gezeigt, dass $K^0(X) = \lim\limits_{\leftarrow} K^0(X^{(n)})$ ist, Elemente aus $K^0(X)$ sind also durch die Menge ihrer Bilder unter j_n^* eindeutig bestimmt. Wir haben in diesem Beweis ebenfalls gezeigt, dass die $K^0(X)$ und $K^0(X^{(n)})$ freie abelsche Gruppen sind, folglich gilt dasselbe für die $j_n^* \otimes \mathrm{id}$. Ebenso ist jedes Element $x \in H^{\pi,*}(X;\mathbb{Q})$ durch $(j_n^* x)_{n\geq 0}$ eindeutig bestimmt. Da die Cherncharaktere für $X^{(n)}$ Isomorphismen sind, müssen wir ch wie in 5.10 definieren.

(ii) Der so definierte Cherncharakter ist natürlich: Es seien X, Y Räume, für die der Cherncharakter definiert ist, und es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f^* \circ \mathrm{ch} = \mathrm{ch} \circ f^*$, denn die inversen Systeme aus Lemma 5.9 und damit $L_H, \mathrm{ch}_{\lim}$ und L_K sind natürlich in X.

5.2 Ein Vergleich zwischen Diamantprodukt und zweitem Koprodukt

Nun kommen wir zum versprochenen Vergleich: Wir haben zwei Abbildungen

$$*, \diamond \colon \Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty \times \Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty \to \Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty,$$

die Verkettung von Wegen und das Diamantprodukt, und zwei dadurch induzierte Koprodukte auf QSymm. Das durch $*$ induzierte Koprodukt entspricht nach Satz 4.13 dem ersten Koprodukt auf QSymm. Es stellt sich nun die Frage nach einem Zusammenhang zwischen $\diamond_Q$ und dem zweiten Koprodukt $\tilde{\Delta}_Q$ aus Abschnitt 4.1, und wir wollen versuchen, die auf K-Theorie von $\diamond$ induzierte Abbildung mit der Abbildung $\tilde{\Delta}_Q$ zu vergleichen. Der eben definierte Cherncharakter liefert uns die hierfür nötige Verbindung zwischen $K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)$ und $H^*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathrm{QSymm}$.
An dieser Stelle ist eine technische Warnung angebracht: Lemma 4.9 liefert nur, dass $\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty$ homotopieäquivalent zum CW-Komplex $J\mathbb{C}P^\infty$ ist, streng genommen dürfen wir nach unserer Definition von K-Theorie gar nicht $K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)$ schreiben. Man kann die Definitionen aber natürlich mithilfe der Homotopieäquivalenzen verallgemeinern, denn die Konstruktionen sind homotopieinvariant.
Ebenso werden wir im Folgenden die Zellstruktur von $J\mathbb{C}P^\infty$ aus Lemma 5.8 nutzen und dabei, um keine unnötige Notation anzuhäufen, das Bild von $J\mathbb{C}P^{\infty(n)}$ unter der Homotopieäquivalenz aus 4.9 mit $\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty(n)}$ bezeichnen.

Es sei $x \in H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \subset H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \subset H^{\pi,*}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q})$ gegeben. Am liebsten würden wir x als Element in $K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)$ auffassen und dann $\diamond^*$ darauf anwenden. Allerdings haben wir zwar den Cherncharakter $\mathrm{ch}\colon K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)\otimes\mathbb{Q} \to H^{\pi,*}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q})$, aber dieser ist nur injektiv, ein Urbild von x unter ch muss nicht existieren. Daher betrachten wir für $m \geq 2n$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)\otimes\mathbb{Q} \arrow[r, "j_m^*\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{ch}"] & K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty(m)})\otimes\mathbb{Q} \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\
H^{\pi,*}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \arrow[r, "j_m^*"] & H^*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty(m)};\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

Die untere Abbildung ist im Grad $2n$ ein Isomorphismus, ebenso der rechte Cherncharakter. Im Beweis von Lemma 5.9 haben wir uns überlegt, dass die obere Abbildung $j_m \otimes \mathrm{id}$ surjektiv ist. Wir können also ein $y \in K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)\otimes\mathbb{Q}$ wählen mit

$$\mathrm{ch}\circ(j_m^*\otimes\mathrm{id})(y) = j_m^* x$$

Dieses y wird von $\diamond^*\otimes\mathrm{id}$ auf ein Element in $K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty\times\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)\otimes\mathbb{Q}$ abgebildet. Hierauf können wir den Cherncharakter und dann gradweise das Kreuzprodukt anwenden. Da $\tilde{\Delta}_Q(x) \in \mathrm{QSymm}_n \otimes \mathrm{QSymm}_n$ ist, projizieren wir noch auf die Komponente im Bigrad $(2n, 2n)$ und erhalten ein Element in $H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q})\otimes H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \cong \mathrm{QSymm}(\mathbb{Q})_n\otimes\mathrm{QSymm}(\mathbb{Q})_n$. Wir wollen also den Weg von x im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty(m)})\otimes\mathbb{Q} \arrow[d, "\mathrm{ch}"', "\cong"] & K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)\otimes\mathbb{Q} \arrow[l, "j_m^*\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\diamond^*\otimes\mathrm{id}"] \\
H^*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty(m)}) & K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty\times\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)\otimes\mathbb{Q} \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\
x\in H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \arrow[u, "j_m^*"] & H^{\pi,*}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty\times\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \arrow[d, "\cong"', "\prod_{i=0}^\infty\times"] \\
 & \prod_{i=0}^\infty\bigoplus_{a+b=i} H^{2a}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q})\otimes H^{2b}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \arrow[d, "\mathrm{pr}_{2n}\otimes\mathrm{pr}_{2n}"] \\
 & H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q})\otimes H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \arrow[d, "\cong"', "J_Q\otimes J_Q"] \\
 & \mathrm{QSymm}(\mathbb{Q})_n\otimes\mathrm{QSymm}(\mathbb{Q})_n
\end{tikzcd}$$

verfolgen. Wir schreiben kurz

$$f := (J_Q\otimes J_Q)\circ(\mathrm{pr}_{2n}\otimes\mathrm{pr}_{2n})\circ\prod\times\circ\,\mathrm{ch}\circ(\diamond^*\otimes\mathrm{id})$$

für die Hintereinanderausführung der rechten Abbildungen. A priori ist nicht klar, welche Auswirkungen die Wahl von m und die oben besprochene Wahl des Urbildes y haben. Wir werden zunächst für $m \geq 4n$ zeigen, dass das Bild jedes wie oben angegeben gewählten y unter f nicht mit $\tilde{\Delta}_Q$ übereinstimmt. Danach zeigen wir, dass eine andere Wahl von m nichts verbessern.

Die Bedingung

$$j_m^*\circ\mathrm{ch} = \mathrm{ch}\circ(j_m^*\otimes\mathrm{id})(y) = j_m^* x$$

kontrolliert das Bild von y unter ch bis zum Grad m. Die Abbildung, für die wir uns interessieren, besteht aber aus einem Cherncharakter, gefolgt von homogenen Abbildungen und einer Projektion auf die Komponente im Grad $4n$:

Lemma 5.12. Es sei $m \geq 4n$ und $x \in H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q})$. Weiter sei $u \in K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)\otimes\mathbb{Q}$ ein Element, welches

$$\mathrm{ch}\circ(j_m^*\otimes\mathrm{id})(y) = j_m^* x$$

erfüllt. Dann ist

$$f(u) = 0.$$

Beweis. Ist ein solches u gegeben, so gilt

$$j_m^*\circ\mathrm{ch}(u) = \mathrm{ch}\circ(j_m^*\otimes\mathrm{id})(u) = j_m^* x \in H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty(m)};\mathbb{Q}),$$

denn x hat Grad $2n$. Folglich ist wegen $m \geq 4n$

$$j_m^*\circ\mathrm{pr}_{4n}\circ\mathrm{ch}(u) = \mathrm{pr}_{4n}\circ j_m^*\circ\mathrm{ch}(u) = \mathrm{pr}_{4n}\circ j_m^* x = 0.$$

Da $j_m^*\colon H^{\pi,*}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \to H^*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty(m)};\mathbb{Q})$ im Grad $4n \leq m$ ein Isomorphismus ist, muss schon

$$\mathrm{pr}_{4n}\circ\mathrm{ch}(u) = 0$$

sein.
Man überlegt sich leicht, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)\otimes\mathbb{Q} \arrow[r, "\mathrm{ch}"] \arrow[d, "\diamond^*\otimes\mathrm{id}"] & H^{\pi,*}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \arrow[d, "\diamond^*"] \\
K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty\times\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)\otimes\mathbb{Q} \arrow[r, "\mathrm{ch}"] \arrow[d, "\mathrm{ch}"] & H^{\pi,*}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty\times\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \arrow[d, "\mathrm{pr}_{4n}"] \\
H^{\pi,*}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty\times\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{4n}"] \arrow[d, "\cong"', "\prod_{i=0}^\infty\times"] & H^{4n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty\times\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \arrow[d, "\times"] \\
\prod_{i=0}^\infty\bigoplus_{a+b=i} H^{2a}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q})\otimes H^{2b}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{4n}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{2n}\otimes\mathrm{pr}_{2n}"] & \bigoplus_{a+b=2n} H^{2a}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q})\otimes H^{2b}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \arrow[d, "\mathrm{pr}_{2n}\otimes\mathrm{pr}_{2n}"] \\
H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q})\otimes H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q})\otimes H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Damit ist aber

$$\begin{aligned}
& (J_Q\otimes J_Q)\circ(\mathrm{pr}_{2n}\otimes\mathrm{pr}_{2n})\circ(\prod\times)\circ\mathrm{ch}\circ(\diamond^*\otimes\mathrm{id})(u) \\
= \; & (J_Q\otimes J_Q)\circ(\mathrm{pr}_{2n}\otimes\mathrm{pr}_{2n})\circ\times\circ\mathrm{pr}_{4n}\circ\diamond^*\circ\mathrm{ch}(u) \\
= \; & (J_Q\otimes J_Q)\circ(\mathrm{pr}_{2n}\otimes\mathrm{pr}_{2n})\circ\times\circ\diamond^*\circ\mathrm{pr}_{4n}\circ\mathrm{ch}(u) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

wegen der Homogenität von $\diamond^*$. □

Nun ist die Frage, ob die Urbildbedingung

$$\mathrm{ch}\circ(j_m^*\otimes\mathrm{id})(y) = j_m^* x$$

für $2n \leq m < 4n$ Elemente y zulässt, die nicht auf 0 abgebildet werden. Dies können wir hier nicht ausschliessen, aber wir zeigen nun, dass Elemente, die die Urbildbedingung für $m = 4n$ erfüllen, auch fur $m < 4n$ zulässig sind. Gibt es also für $m < 4n$ Urbilder y mit $f(y) \neq 0$, so erhalten wir unter der Urbildbedingung für $m < 4n$ keine wohldefinierte Abbildung.

Lemma 5.13. Es sei $2n \leq m < 4n$ und $x \in H^{2n}(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Q})$. Ist $y \in K^0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \otimes \mathbb{Q}$ mit

$$\mathrm{ch} \circ (j_{4n}^* \otimes \mathrm{id})(y) = j_{4n}^* x,$$

so ist auch

$$\mathrm{ch} \circ (j_m^* \otimes \mathrm{id})(y) = j_m^* x.$$

Beweis. Für die Inlusionen $i_r \colon \Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty(r)} \to \Omega\Sigma\mathbb{C}P^{\infty(r+1)}$ gilt

$$j_{4n} \circ i_{4n-1} \circ ... \circ i_m = j_m.$$

Da ch natürlich ist, ist also

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} \circ (j_m^* \otimes \mathrm{id})(y) &= \mathrm{ch} \circ (i_m^* \circ ... \circ i_{4n-1}^* \circ j_{4n}^* \otimes \mathrm{id})(y) \\ &= i_m^* \circ ... \circ i_{4n-1}^* \circ \mathrm{ch} \circ (j_{4n}^* \otimes \mathrm{id})(y) \\ &= i_m^* \circ ... \circ i_{4n-1}^* j_{4n}^* x = j_m^* x. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.14. Es ist $\tilde{\Delta}_Q(M_{(1)}) = M_{(1)} \otimes M_{(1)} \neq 0$, denn die 1×1-Matrix mit Eintrag 1 ist die einzige $(0,(1))$-Matrix. Wir haben also keine sinnvoll erscheinende Möglichkeit gefunden, Urbilder so zu wählen, dass die betrachtete Abbildung mit $\tilde{\Delta}_Q$ übereinstimmt.

Ausblick

Unser Versuch, $\diamond_Q$ mithilfe des Cherncharakters in das rein algebraisch definierte Koprodukt $\tilde{\Delta}_Q$ zu überführen, ist fehlgeschlagen.
Ein anderer möglicher Ansatz ist der Folgende: Man kann den Beweis, dass $H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \cong T_{\mathbb{Z}=H_*(\mathrm{pt}}(\tilde{H}_*(\mathbb{C}P^\infty))$ist, auf K-Theorie übertragen und so NSymm mit der K-Homologie $K_0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty)$ von $\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty$ identifizieren. Das Diamantprodukt $\diamond$ induziert wieder eine Multiplikation

$$\diamond_{K,N} \colon K_0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \otimes K_0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \to K_0(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^\infty).$$

Mit den gleichen Überlegungen wie in Lemma 4.17 erhält man eine Formel für $Z_i \diamond_{K,N} Z_j$. Dieses (inhomogene) Koprodukt lässt sich dann in den passenden Graden mit $\tilde{\Delta}_N$, der zu $\tilde{\Delta}_Q$ dualen Multiplikation auf NSymm, vergleichen. Dieser Vergleich steht aus, in einfachen Fällen sind die Ergebnisse positiv.

In den Abschnitten 1 bis 3 haben wir QSymm als $\mathcal{G}_0(H)$ identifiziert und gezeigt, dass der Dualität von QSymm und NSymm eine Dualität von $\mathcal{G}_0(H)$ und $\mathcal{K}_0(H)$ entspricht. Die Beweise hierzu waren leider sehr technisch und wenig informativ.
Möglicherweise ließe sich die für den gegebenen Beweis wesentliche Tatsache, dass die Heckealgebren H_n Frobeniusalgebren sind, für einen alternativen Beweis der Dualität nutzen: Über die einer K-Frobeniusalgebra A zugehörige Bilinearform lässt sich ein Automorphismus

$$\nu \colon A \to A,$$

genannt Nakayama-Automorphismus von A, konstruieren. Ist M ein A-Modul, so definiert ν eine zweite A-Modulstruktur auf der abelschen Gruppe M. Dieser Modul sei mit M^ν bezeichnet.
Da projektive Moduln über Frobeniusalgebren auch injektiv sind, kann man analog zur Paarung aus Abschnitt 3 eine zweite Paarung

$$\langle , \rangle \colon \mathcal{K}_0(H_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}_0(H_n) \to \mathbb{Z}, \quad M \otimes N \mapsto \dim_K \mathrm{Hom}_{H_n}(N, M)$$

definieren. Sind $E_1, ..., E_m$ die einfachen H_n-Moduln und $P_1, ..., P_m$ unzerlegbare projektive H_n-Moduln mit $P_i/\mathrm{rad}P_i \cong E_i$, so kann man zeigen, dass

$$\langle P_i, E_j^\nu \rangle = \delta_{i,j}$$

ist. Für diese Paarung zeigt man leicht die Lemma 3.23 entsprechende Aussage.
Vielleicht lässt sich mithilfe dieser beiden Paarungen ebenfalls die Dualität zwischen $\mathcal{G}_0(H)$ und $\mathcal{K}_0(H)$ zeigen. Falls dies möglich ist, wäre verständlicher, welche Rolle die Frobeniusalgebrastruktur der H_n für diese Dualität spielt.

Literatur

[1] M. F. Atiyah. *K-theory.* Lecture notes by D. W. Anderson. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[2] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch. Vector bundles and homogeneous spaces. In *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. III*, pages 7–38. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.

[3] Andrew Baker and Birgit Richter. Quasisymmetric functions from a topological point of view. *Math. Scand.*, 103(2):208–242, 2008.

[4] Nantel Bergeron and Huilan Li. Algebraic structures on Grothendieck groups of a tower of algebras. *J. Algebra*, 321(8):2068–2084, 2009.

[5] R. W. Carter. Representation theory of the 0-Hecke algebra. *J. Algebra*, 104(1):89–103, 1986.

[6] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1981. With applications to finite groups and orders, Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication.

[7] Gérard Duchamp, Alexander Klyachko, Daniel Krob, and Jean-Yves Thibon. Noncommutative symmetric functions. III. Deformations of Cauchy and convolution algebras. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 1(1):159–216, 1997. Lie computations (Marseille, 1994).

[8] Matthew Fayers. 0-Hecke algebras of finite Coxeter groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 199(1-3):27–41, 2005.

[9] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[10] Allen Hatcher. Vector bundles and k-theory, 2009. Online erhältlich auf `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/`.

[11] Michiel Hazewinkel. *Formal groups and applications*, volume 78 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.

[12] Michiel Hazewinkel. Symmetric functions, noncommutative symmetric functions, and quasisymmetric functions. In *Third International Algebraic Conference in the Ukraine (Ukrainian)*, pages 259–282. Natsīonal. Akad. Nauk Ukraïni Īnst. Mat., Kiev, 2002.

[13] Michiel Hazewinkel. Witt vectors. I. In *Handbook of algebra. Vol. 6*, volume 6 of *Handb. Algebr.*, pages 319–472. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2009.

[14] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1978. Second printing, revised.

[15] Jens Carsten Jantzen and Joachim Schwermer. *Algebra*, volume 87 of *Springer-Lehrbuch.* Springer, Berlin, 2006.

[16] S. O. Kochman. *Bordism, stable homotopy and Adams spectral sequences*, volume 7 of *Fields Institute Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[17] Daniel Krob and Jean-Yves Thibon. Noncommutative symmetric functions. IV. Quantum linear groups and Hecke algebras at $q = 0$. *J. Algebraic Combin.*, 6(4):339–376, 1997.

[18] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1995. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[19] Bruce A. Magurn. *An algebraic introduction to K-theory*, volume 87 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[20] Andrew Mathas. *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group*, volume 15 of *University Lecture Series.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[21] J. P. May. *A concise course in algebraic topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[22] John Milnor. On spaces having the homotopy type of a CW-complex. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90:272–280, 1959.

[23] John W. Milnor and John C. Moore. On the structure of Hopf algebras. *Ann. of Math. (2)*, 81:211–264, 1965.

[24] P. N. Norton. 0-Hecke algebras. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 27:337–357, 1979.

[25] Paul Selick. *Introduction to homotopy theory*, volume 9 of *Fields Institute Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[26] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.

[27] Moss E. Sweedler. *Hopf algebras.* Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[28] Robert M. Switzer. *Algebraic topology—homotopy and homology.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Reprint of the 1975 original [Springer, New York; MR0385836 (52 #6695)].

[29] George W. Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1978.