Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2017/18

Blatt 9 Abgabetermin: Freitag, 22. Dezember 2017

Aufgabe 33 (2 Punkte)

Es sei R' ein Unterring eines Ringes R und $I \subseteq R$ sei ein Ideal. Zeigen Sie, dass $I \cap R'$ ein Ideal in R' ist und dass $R'/(I \cap R')$ isomorph ist zu $(R' + I)/I$.

Aufgabe 34 (2 +2 Punkte)

Betrachten Sie die Teilmenge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

und definieren Sie die Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}[i]$ analog zu den entsprechenden Verknüpfungen in $\mathbb{C}$. Damit ist $\mathbb{Z}[i]$ ein kommutativer Ring, der *Ring der Gaußschen Zahlen* (nach Carl Friedrich Gauß).

(1) Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$.
(2) Zerlegen Sie die Zahl 2 in ein nicht-triviales Produkt in $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 35 (2+2+2 Punkte)

Ein Integritätsbereich R heißt *euklidisch*, falls es eine Abbildung $\nu\colon R\backslash\{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt, so dass es für alle Elemente $a, b \in R$ mit $a \neq 0$ Elemente $x, r \in R$ gibt, so dass

$$b = xa + r \text{ und } \nu(r) < \nu(a) \text{ oder } r = 0.$$

(1) Zeigen Sie, dass jeder euklidische Ring ein Hauptidealring ist.
(2) Es sei $d \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, dass d von keinem Quadrat einer natürlichen Zahl $\neq 1$ geteilt wird. Betrachten Sie

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) := \{x + y\sqrt{d} | x, y \in \mathbb{Q}\}$$

als Teilmenge der komplexen Zahlen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit der vererbten Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ ein Körper ist. (Rechnen Sie nur das nach, was Sie nachweisen müssen!)
(3) Wir setzen

$$\omega(d) := \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{falls } d \equiv 2, 3 \bmod 4, \\ \frac{1+\sqrt{d}}{2}, & \text{falls } d \equiv 1 \bmod 4. \end{cases}$$

Sie dürfen benutzen, dass $\mathcal{O}_d := \{x + y\omega(d) | x, y \in \mathbb{Z}\}$ ein Unterring von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ist. Diesen Integritätsbereich nennt man *Ring der ganzen Zahlen des Körpers* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_2$ euklidisch ist.

Aufgabe 36 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein"; geben Sie keine Begründung.

Ja ☐ Nein ☐ Es sei $R \neq 0$ ein kommutativer Ring. Ist dann $\{0\}$ immer ein Primideal?
Ja ☐ Nein ☐ Ist der Ring der Gauss'schen Zahlen, $\mathbb{Z}[i]$, ein Hauptidealring?
Ja ☐ Nein ☐ Es sei K ein Körper und $R \neq 0$ ein beliebiger Ring ungleich dem Nullring. Kann ein Ringhomomorphismus $f\colon K \to R$ dann einen nicht-trivialen Kern haben?
Ja ☐ Nein ☐ Es seien R und R' nicht-triviale Ringe und $f\colon R \to R'$ ein Homomorphismus von Ringen. Gilt dann $f(R^\times) \subseteq R'^\times$?
Ja ☐ Nein ☐ Ist der Restklassenring $\mathbb{Z}[i]/(1 + 3i)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$?
Ja ☐ Nein ☐ Es sei I ein Ideal in einem Ring R und $f\colon R \to R'$ sei ein Ringhomomorphismus. Ist dann $f(I)$ immer ein Ideal in R'?