Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2017/18

Blatt 8 Abgabetermin: Freitag, 15. Dezember 2017

Aufgabe 29 (2+2 Punkte)

Es sei S eine Teilmenge einer Gruppe G. Dann heißt G *freie Gruppe mit Basis* S, falls $\langle S\rangle = G$ und zu jeder Gruppe G' und jeder Abbildung von Mengen $f\colon S \to G'$ gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi_f\colon G \to G'$ mit $\varphi_f(s) = f(s)$ für alle $s \in S$.

Ist G eine freie Gruppe mit Basis S, so bezeichnen wir G mit $F(S)$ ("F" wie "frei").

- Zeigen Sie durch Konstruktion, dass $F(S)$ existiert für eine beliebige Menge S.
- Zeigen Sie, dass die definierende Eigenschaft von $F(S)$ dafür sorgt, dass jede andere Gruppe mit dieser Eigenschaft isomorph ist zu $F(S)$.

Aufgabe 30 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Torsionselemente der Faktorgruppen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ von $(\mathbb{R},+)$ und $(\mathbb{Q},+)$.

Aufgabe 31 (3+3 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}^4$ und nennen seine Standardbasis $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (1, i, j, k)$. Wir definieren eine Multiplikation auf diesem Vektorraum durch eine Multiplikation auf der Basis, indem wir 1 als neutrales Element für die Multiplikation wählen und ansonsten setzen

$$\begin{array}{rrr} i^2 = -1, & ij = k, & ik = -j, \\ ji = -k, & j^2 = -1, & jk = i, \\ ki = j, & kj = -i, & k^2 = -1. \end{array}$$

Die *Hamiltonschen Quaternionen*, $\mathbb{H}$, bezeichnen diesen Vektorraum mit der so definierten Multiplikation.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper aber kein Körper ist.

(2) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^3 = \{w \in \mathbb{H}, ||w|| = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{H}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist und dass diese isomorph ist zu $SU(2)$. Hierbei bezeichnet $||.||$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 32 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein"; geben Sie keine Begründung.

- Ja ☐ Nein ☐ Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Ist G genau dann zyklisch, wenn G keine Untergruppe der Form $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ besitzt (p prim)?
- Ja ☐ Nein ☐ Es seinen $K_i, i \in I$ Körper für eine Indexmenge I. Ist dann das Produkt $\prod_{i\in I} K_i$ mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation ein Körper?
- Ja ☐ Nein ☐ Es sei $R \neq 0$ ein Ring. Bilden dann die Einheiten des Ringes R, $R^\times$, eine Gruppe?
- Ja ☐ Nein ☐ Es sei G eine beliebige Gruppe. Bilden dann die Endomorphismen von G immer einen Ring, wenn man die Komposition von Abbildungen als multiplikative Verknüpfung wählt und die Verknüpfung $(f + g)(x) := f(x)g(x)$ für Endomorphismen f und g und Gruppenelemente $x \in G$ als Addition ansetzt?
- Ja ☐ Nein ☐ Es sei R ein kommutativer Ring, $x \in R^\times$ und $(x) = \{x \cdot y, y \in R\}$. Ist dann $(x) = R$?
- Ja ☐ Nein ☐ Es sei R ein Ring. Gilt dann für alle $a \in R$ die Gleichheit $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$?