

Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2017/18

Blatt 7

Abgabetermin: Freitag, 8. Dezember 2017

Aufgabe 25

(2+2 Punkte)

- (1) Es sei G eine Gruppe und N sei eine normale Untergruppe von G . Zeigen Sie, dass G/N genau dann abelsch ist, wenn $[G, G] < N$. Insbesondere ist $G/[G, G]$ abelsch.
- (2) Es sei G eine einfache, nicht-abelsche Gruppe und A sei eine abelsche Gruppe. Beweisen Sie, dass alle Homomorphismen $f: G \rightarrow A$ trivial sind.

Aufgabe 26

(2+1+1 Punkte)

Es sei G eine endliche Gruppe. Der *Exponent von G* sei die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $g^n = 1$ für alle $g \in G$.

- (1) Zeigen Sie, dass der Exponent von G das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen der Elemente in G ist.
- (2) Beweisen Sie: Ist $m \in \mathbb{N}$ mit $g^m = 1$ gegeben für alle g in G , so teilt der Exponent m . Der Exponent von G teilt $|G|$.
- (3) Was ist der Exponent von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$) und von der Diedergruppe D_{2n} mit $2n$ Elementen ($n \geq 3$)?

Aufgabe 27

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Gruppe $G = \prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass G nicht isomorph ist zur direkten Summe $G/G_{\text{tor}} \oplus G_{\text{tor}}$.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass es in der Faktorgruppe G/G_{tor} ein Element $x \neq 0$ gibt, dass durch jede Primzahl p teilbar ist. Gibt es ein solches Element in G ?)

Aufgabe 28 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit “Ja” oder “Nein”; geben Sie keine Begründung.

- Ja Nein Gibt es eine nicht-abelsche Gruppe G , deren Torsionsmenge $\{g \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}, g^n = 1\}$ keine Untergruppe ist?
- Ja Nein Kann es eine endliche abelsche Gruppe G geben, für die die Torsionsuntergruppe eine echte Untergruppe ist?
- Ja Nein Ist $(\mathbb{Q}, +)$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe?
- Ja Nein Ist jede abelsche Torsionsgruppe endlich?
- Ja Nein Stimmt es, dass eine Gruppe G genau dann nilpotent ist, wenn $G/Z(G)$ nilpotent ist?
- Ja Nein Sind abelsche Gruppen nilpotent?