

Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2017/18

Blatt 3

Abgabetermin: Freitag, 10. November 2017

Aufgabe 9

(1+2+1 Punkte)

Sind N und H Gruppen, so ist eine Gruppenerweiterung von N durch H eine Folge von Gruppen und Gruppenhomomorphismen $1 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$, so dass gilt:

- φ ist ein Monomorphismus,
- π ist ein Epimorphismus und
- der Kern von π ist gleich dem Bild von φ .

- (1) Zeigen Sie, dass jedes semidirekte Produkt $G = N \rtimes H$ eine Gruppenerweiterung gibt.
- (2) Umgekehrt: Ist $1 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$ eine Gruppenerweiterung und gibt es einen Homomorphismus $s: H \rightarrow G$ mit $\pi \circ s = \text{id}_H$, so ist G zu $N \rtimes H$ isomorph.
- (3) Zeigen Sie, dass $GL_n(k)$ isomorph ist zum semidirekten Produkt der Gruppen $SL_n(k)$ und $k \setminus \{0\}$.

Aufgabe 10

(2+3 Punkte)

Betrachten Sie die Matrizen $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$ in $O(2)$. Sie wissen, dass R eine zyklische Gruppe der Ordnung n erzeugt.

- (1) Bestimmen Sie $(RS)^2$. Beschreiben Sie die Elemente R^i und SR^i als Drehungen bzw Spiegelungen des \mathbb{R}^2 und geben Sie die Drehwinkel und Spiegelachsen an.
- (2) Es sei $G < O(2)$ die Untergruppe, die aus allen möglichen Verknüpfungen der Elemente S und R besteht. Zeigen Sie, dass G das semidirekte Produkt der Gruppen $\langle R \rangle$ und $\langle S \rangle$ ist und dass G $2n$ Elemente hat.

Die Gruppe G heißt Diedergruppe der Ordnung $2n$ und wird häufig mit D_{2n} , manchmal aber auch mit D_n , bezeichnet.

Aufgabe 11

(3 Punkte)

Es seien G_1, \dots, G_n Gruppen und $\prod_{i=1}^n G_i$ ihr direktes Produkt. Wir bezeichnen mit π_j die Projektion $\pi_j: \prod_{i=1}^n G_i \rightarrow G_j, (g_1, \dots, g_n) \mapsto g_j$ für $j \in \{1, \dots, n\}$.

Zeigen Sie, dass das direkte Produkt die folgende universelle Eigenschaft hat: Ist H eine Gruppe und ist $f_i: H \rightarrow G_i, i = 1, \dots, n$ eine Familie von Homomorphismen, so gibt es genau einen Homomorphismus $f: H \rightarrow \prod_{i=1}^n G_i$ mit $\pi_j \circ f = f_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Aufgabe 12 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein"; geben Sie keine Begründung.

- Ja Nein Kann das Produkt zweier Gruppen $G_1 \times G_2$ abelsch sein, obwohl G_1 nicht abelsch ist?
- Ja Nein Kann die symmetrische Gruppe auf drei Elementen Σ_3 das Produkt zweier Gruppen $G_1 \times G_2$ sein, so dass weder G_1 noch G_2 die triviale Gruppe ist?
- Ja Nein Es sei C_3 eine zyklische Gruppe der Ordnung 3. Ist dann $C_3 \times C_3$ isomorph zu $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$?
- Ja Nein Sind $\varphi_1: G_1 \rightarrow G'_1$ und $\varphi_2: G_2 \rightarrow G'_2$ Homomorphismen. Es sei $\varphi_1 \times \varphi_2$ die Abbildung, die ein $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ auf $(\varphi_1(g_1), \varphi_2(g_2))$ abbildet. Ist dann $\text{kern}(\varphi_1 \times \varphi_2) = \text{kern}(\varphi_1) \times \text{kern}(\varphi_2)$?
- Ja Nein Es seien A_1 und A_2 zwei nicht-triviale abelsche Gruppen und $G = A_1 \rtimes A_2$ sei ein semidirektes Produkt von A_1 und A_2 . Ist G dann immer abelsch?
- Ja Nein Sind Produkte zyklischer Gruppen immer zyklisch?