

# Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2017/18

**Blatt 2**

Abgabetermin: **Freitag, 3. November 2017**

**Aufgabe 5**

(1 + 2 + 1 Punkte)

Es sei  $G$  eine Gruppe und  $Z(G)$  ihr Zentrum. Zeigen Sie

- (1) Die Gruppe der inneren Automorphismen von  $G$  ist isomorph zu  $G/Z(G)$ .
- (2) Ist die Automorphismengruppe von  $G$ ,  $\text{Aut}(G)$ , zyklisch, so ist  $G$  abelsch.
- (3) Ist die Faktorgruppe  $G/Z(G)$  zyklisch, so ist  $G$  abelsch.

**Aufgabe 6**

(1 + 2 + 1 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung die Eulersche  $\varphi$ -Funktion kennengelernt. Beweisen Sie die folgenden elementaren Regeln:

- Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ .
- Sind  $n$  und  $m$  teilerfremde natürliche Zahlen, so gilt  $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ .
- Ist  $p$  eine Primzahl, so ist  $\varphi(p) = p - 1$  und  $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$ .

**Aufgabe 7**

(2 + 2 Punkte)

Es sei  $K$  eine Gruppe der Ordnung 4, die nicht zyklisch ist. Es sei  $K = \{e, a_1, a_2, a_3\}$  mit neutralem Element  $e$ . Zeigen Sie, dass jedes der Elemente  $a_i$  Ordnung zwei hat und dass  $a_i a_j = a_k$  für alle Permutationen  $i, j, k$  von 1, 2, 3 gilt.

Finden Sie eine Untergruppe der Permutationsgruppe auf 4 Elementen,  $\Sigma_4$ , die zu  $K$  isomorph ist. Die Gruppe  $K$  heißt die *Kleinsche Vierergruppe*.

**Aufgabe 8 – Ja oder Nein?** Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit “Ja” oder “Nein”; geben Sie keine Begründung.

- Ja  Nein  Sind Urbilder von Normalteilern unter Homomorphismen immer Normalteiler?  
Ja  Nein  Sind Bilder von Normalteilern unter Homomorphismen immer Normalteiler?  
Ja  Nein  Ist das Zentrum einer Gruppe immer ein Normalteiler?  
Ja  Nein  Gibt es für natürliche Zahlen  $m > 0$  Homomorphismen von  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}$ , deren Bild nicht nur aus der Null besteht?  
Ja  Nein  Ist  $H < G$  eine Untergruppe vom Index 2, ist  $H$  dann immer normal in  $G$ ?  
Ja  Nein  Ist  $H < G$  eine Untergruppe vom Index 3, ist  $H$  dann immer normal in  $G$ ?