

# Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2017/18

Blatt 2

Abgabetermin: **Freitag, 3. November 2017**

## Aufgabe 5

(1 + 2 + 1 Punkte)

Es sei  $G$  eine Gruppe und  $Z(G)$  ihr Zentrum. Zeigen Sie

- (1) Die Gruppe der inneren Automorphismen von  $G$  ist isomorph zu  $G/Z(G)$ .
- (2) Ist die Automorphismengruppe von  $G$ ,  $\text{Aut}(G)$ , zyklisch, so ist  $G$  abelsch.
- (3) Ist die Faktorgruppe  $G/Z(G)$  zyklisch, so ist  $G$  abelsch.

## Aufgabe 6

(1 + 2 + 1 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung die Eulersche  $\varphi$ -Funktion kennengelernt. Beweisen Sie die folgenden elementaren Regeln:

- Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ .
- Sind  $n$  und  $m$  teilerfremde natürliche Zahlen, so gilt  $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ .
- Ist  $p$  eine Primzahl, so ist  $\varphi(p) = p - 1$  und  $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$ .

## Aufgabe 7

(2 + 2 Punkte)

Es sei  $K$  eine Gruppe der Ordnung 4, die nicht zyklisch ist. Es sei  $K = \{e, a_1, a_2, a_3\}$  mit neutralem Element  $e$ . Zeigen Sie, dass jedes der Elemente  $a_i$  Ordnung zwei hat und dass  $a_i a_j = a_k$  für alle Permutationen  $i, j, k$  von 1, 2, 3 gilt.

Finden Sie eine Untergruppe der Permutationsgruppe auf 4 Elementen,  $\Sigma_4$ , die zu  $K$  isomorph ist. Die Gruppe  $K$  heißt die *Kleinsche Vierergruppe*.

**Aufgabe 8 – Ja oder Nein?** Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit “Ja” oder “Nein”; geben Sie keine Begründung.

- Ja  Nein  Sind Urbilder von Normalteilern unter Homomorphismen immer Normalteiler?
- Ja  Nein  Sind Bilder von Normalteilern unter Homomorphismen immer Normalteiler?
- Ja  Nein  Ist das Zentrum einer Gruppe immer ein Normalteiler?
- Ja  Nein  Gibt es für natürliche Zahlen  $m > 0$  Homomorphismen von  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  nach  $\mathbb{Z}$ , deren Bild nicht nur aus der Null besteht?
- Ja  Nein  Ist  $H < G$  eine Untergruppe vom Index 2, ist  $H$  dann immer normal in  $G$ ?
- Ja  Nein  Ist  $H < G$  eine Untergruppe vom Index 3, ist  $H$  dann immer normal in  $G$ ?