

# Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2017/18

**Blatt 11**

Abgabetermin: Freitag, 19. Januar 2018

**Aufgabe 41**

(2 Punkte)

Sind  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$  die einzigen echten Zwischenerweiterungen zwischen  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 42**

(2 + 2 + 1 Punkte)

- (1) Beweisen Sie, dass jeder endliche Körper  $p^n$  Elemente für eine Primzahl  $p$  und eine natürliche Zahl  $n$  hat.
- (2) Es sei  $\zeta_5 = e^{2\pi i/5} \in \mathbb{C}$ . Was ist der Körpergrad  $[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}]$  und warum?
- (3) Entscheiden und begründen Sie, ob die Elemente  $\cos(2\pi/5)$  und  $\sin(2\pi/5)i$  Elemente von  $\mathbb{Q}(\zeta_5)$  sind.

**Aufgabe 43**

(3 + 2 Punkte)

- (1) Überlegen Sie sich, ob es für jede natürliche Zahl  $m \in \mathbb{N}$  eine einfache Körpererweiterung  $\mathbb{Q}(a_m)$  gibt mit  $[\mathbb{Q}(a_m) : \mathbb{Q}] = m$ .
- (2) Zeigen Sie, dass für eine Folge  $p_1, \dots, p_n$  paarweise verschiedener Primzahlen  $p_i$  gilt, dass  $\sqrt{p_n} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$ . Was ist der Körpergrad von  $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$  über  $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$  und über  $\mathbb{Q}$ ?

**Aufgabe 44 – Ja oder Nein?** Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit “Ja” oder “Nein”; geben Sie keine Begründung.

- Ja  Nein  Kann ein Körper gleichzeitig  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  mit  $p$  prim als Primkörper haben?
- Ja  Nein  Ist jeder Körper Körpererweiterung seines Primkörpers?
- Ja  Nein  Es sei  $R$  ein Integritätsbereich und ein Unterring eines Körpers  $K$ . Ist dann immer der Quotientenkörper  $\text{Quot}(R)$  isomorph zu einem Unterkörper von  $K$ ?
- Ja  Nein  Ist  $\mathbb{Q}(i)$  isomorph zu  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum?
- Ja  Nein  Es seien  $K \subset L$  und  $K \subset L'$  Körpererweiterungen. Folgt aus  $[L : K] = [L' : K]$ , dass  $L$  und  $L'$  als Körper isomorph sind?
- Ja  Nein  Es seien  $K \subset L$  und  $L \subset L'$  Körpererweiterungen mit  $[L : K] = [L' : K] < \infty$ . Sind dann  $L$  und  $L'$  isomorph als Körper?