Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2017/18

Blatt 10 Abgabetermin: Freitag, 12. Januar 2018

Aufgabe 37 (2 Punkte)

Sie wissen, dass der Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring sein kann. Geben Sie ein Ideal I in $\mathbb{Z}[X]$ an, das kein Hauptideal ist, und weisen Sie auch nach, dass es keins ist. (Wenn Sie eins gefunden haben, finden Sie dann auch unendlich viele?)

Aufgabe 38 (2+2+2 Punkte)

(1) Es sei K ein Körper. Eine Funktion $f\colon K \to K$ heißt *Polynomfunktion*, falls es ein Polynom $g \in K[X]$ gibt mit $f(a) = g(a)$ für alle $a \in K$. Zeigen Sie, dass jede beliebige Funktion eine Polynomfunktion ist, falls K endlich ist.

(2) Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^4 + 1$. Ist f irreduzibel als Element in $\mathbb{Z}[X]$?

(3) Sie können f auch als Element in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ auffassen für alle Primzahlen p. Ist f dort irreduzibel?

Aufgabe 39 (2 + 2 Punkte)

(1) Es sei $R \neq 0$ ein kommutativer Ring und $0 \neq \mathfrak{p} \subset R$ sei ein Primideal. Zeigen Sie, dass die Lokalisierung von R an $R\backslash\mathfrak{p}$ nur ein einziges maximales Ideal hat und geben Sie dieses an.

(2) Es sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls es eine natürliche Zahl n gibt, so dass $x^n = 0$ gilt. Es sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Wie sehen die nilpotenten Elemente in $R[S^{-1}]$ aus?

Aufgabe 40 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit “Ja” oder “Nein”; geben Sie keine Begründung.

- Ja ☐ Nein ☐ Es sei R ein Hauptidealring und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R mit $0 \notin S$. Ist dann $R[S^{-1}]$ wieder ein Hauptidealring?
- Ja ☐ Nein ☐ Es sei R ein Integritätsbereich und $|R| < \infty$. Ist R dann ein Körper?
- Ja ☐ Nein ☐ Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{Z}_{(p)}$ sei die Lokalisierung an $S = \mathbb{Z}\backslash(p)$. Hat dann der Faktorring $\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}$ mehr Elemente als $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
- Ja ☐ Nein ☐ Es sei R ein Integritätsbereich mit unendlich vielen Elementen und es seien f und g zwei Polynome in $R[X]$ mit $f \neq g$. Kann dann für alle $b \in R$ gelten, dass $f(b) = g(b)$?
- Ja ☐ Nein ☐ Es sei R ein kommutativer Ring. Ist dann der Polynomring in einer Unbestimmten Y über dem Polynomring in einer Unbestimmten X, $R[X][Y]$, isomorph zum Polynomring $R[X, Y]$?
- Ja ☐ Nein ☐ Ist $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ zyklisch?