Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2017/18

Blatt 1 Abgabetermin: Freitag, 27. Oktober 2017

Aufgabe 1 (1+2+1 Punkte)

Betrachten Sie die Menge aller Paare reeller Zahlen (a, b) mit $a \neq 0$. Wir definieren eine Verknüpfung auf dieser Menge durch

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac, bc + d).$$

- Beweisen Sie, dass dies eine Gruppe definiert.
- Bestimmen Sie alle ganzzahligen Potenzen der Elemente der Form $(a, 0)$ und $(1, b)$.
- Zeigen Sie, dass die Elemente der Form $(1, b)$ mit $b \in \mathbb{R}$ eine Untergruppe bilden.

(Sehen Sie eine geometrische Interpretation dieser Gruppe?)

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

(1) Zeigen Sie, dass eine nichtleere Teilmenge H einer Gruppe G genau dann eine Untergruppe ist, wenn für alle $a, b \in H$ das Element ab^{-1} in H liegt.

(2) Es sei H eine nichtleere, endliche Teilmenge einer Gruppe G. Beweisen Sie, dass H eine Untergruppe von G ist, falls H abgeschlossen unter der Verknüpfung ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es seien H_1 und H_2 Untergruppen einer Gruppe G. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $H_1 \cup H_2$ genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $H_1 \subset H_2$ oder $H_2 \subset H_1$.

Aufgabe 4 – Ja oder Nein? Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen halben Punkt, für eine falsche Antwort einen halben Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein"; geben Sie keine Begründung.

Ja ☐ Nein ☐ Ist G eine abelsche Gruppe, ist dann auch jede Untergruppe $H < G$ abelsch?

Ja ☐ Nein ☐ Ist G eine nicht-abelsche Gruppe, kann G dann nur nicht-abelsche Untergruppen haben?

Ja ☐ Nein ☐ Es sei σ die Permutation in Σ_4, die gegeben ist durch $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 1$. Hat die von σ erzeugte Untergruppe $\langle\sigma\rangle$ die Mächtigkeit 4?

Ja ☐ Nein ☐ Es sei σ die Permutation in Σ_4, die gegeben ist durch $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 1$. Hat die von σ erzeugte Untergruppe $\langle\sigma\rangle$ die Mächtigkeit 3?

Ja ☐ Nein ☐ Es sei K ein Körper und $n > 1$. Es sei $(-)^t\colon GL_n(K) \to GL_n(K)$ die Abbildung, die einer invertierbaren Matrix A die transponierte Matrix A^t zuordnet, d. h. ist der Eintrag von A an der Stelle (i, j) a_{ij} so ist der Eintrag von A^t an der Stelle (i, j) gleich a_{ji}. Ist $A \mapsto A^t$ ein Gruppenhomomorphismus, wenn wir auf $GL_n(K)$ die Gruppenstruktur betrachten, die durch Matrizenmultiplikation gegeben ist?

Ja ☐ Nein ☐ Es seien G und G' zwei Gruppen, die nicht nur aus dem jeweiligen neutralen Element bestehen. Gibt es dann immer einen Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to G'$, der nicht konstant auf das neutrale Element abbildet?