Aufgaben zur Vorlesung *Algebraische und geometrische Strukturen in der Mathematik – Ein Überblick für Lehramtsstudierende*

Prof. Dr. Birgit Richter, Christian Gloy, Nils Matthes, Ann-Sophie Stuhlmann

Sommersemester 2016

Aufgabenblatt 9 zum 14. Juni 2016

1 (Komplexer versus reeller Kosinus)

(1 + 1 + 2 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass das Additionstheorem für den Kosinus, dass Sie für reelle Argumente kennen, auch für komplexe Argumente gilt:

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \text{ für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

b) Leiten Sie her, dass $\cos(iz) = \cosh(z)$ gilt.
c) Zeigen Sie, dass der komplexe Kosinus im Gegensatz zum reellen Kosinus nicht beschränkt ist.

2 (Komplexe Exponentialfunktion)

(1 + 1 + 2 Punkte)

a) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Beschreiben und zeichnen Sie das Bild der Geraden

$$G_{x_0} := \{z = x_0 + iy\}$$

unter der komplexen Exponentialfunktion.
b) Es sei $y_0 \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Beschreiben und zeichnen Sie das Bild der Geraden

$$G_{y_0} := \{z = x + iy_0\}$$

unter der komplexen Exponentialfunktion.
c) Es sei $y_0 \in \mathbb{R}$ wieder fest gewählt. Betrachten Sie den offenen horizontalen Streifen

$$\{z = x + iy | y_0 < y < y_0 + 2\pi\}$$

und beschreiben Sie sein Bild unter der komplexen Exponentialfunktion.

3 (Potenzreihen)

(2 + 2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

1 ist und entscheiden Sie, ob die Reihe für $z = 1$ bzw. $z = -1$ konvergiert.
b) Welchen Konvergenzradius hat die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n+n^2}?$$