Aufgaben zur Vorlesung *Algebraische und geometrische Strukturen in der Mathematik – Ein Überblick für Lehramtsstudierende*

Prof. Dr. Birgit Richter, Christian Gloy, Nils Matthes, Ann-Sophie Stuhlmann

Sommersemester 2016

Aufgabenblatt 8 zum 7. Juni 2016

1 (Gruppe der Möbiustransformationen)

(1 + 1 + 2 Punkte)

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ (also $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $\det(A) = ad - bc \neq 0$) definieren wir die Abbildung

$$\Phi_A \colon \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

a) Es sei $\lambda \in \mathbb{C}^*$ und λE_2 sei das λ-fache der Einheitsmatrix. Was ist $\Phi_{\lambda E_2}$?
b) Rechnen Sie nach, dass

$$\Phi_A \circ \Phi_B = \Phi_{AB}$$

gilt für alle $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$.
c) Berechnen Sie jeweils Φ_A für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{C}^*$ und zeigen Sie, dass sich jedes beliebige Φ_A als Verkettung dieser drei Typen von Abbildungen schreiben läßt.

2 (Scheibe versus obere Halbebene)

(2 + 2 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung

$$z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}.$$

a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung die offene Kreisscheibe $B_1(0)$ in die obere Halbebene abbildet.
b) Beweisen Sie, dass die Abbildung bijektiv ist, und geben Sie eine explizite Umkehrabbildung an. (Wenn Sie möchten, dürfen Sie dazu Aufgabe 1 b) benutzen. Sie können das aber auch elementar machen.)

3 (Harmonisch?)

(2 + 2 Punkte)

a) Sie haben schon gesehen, dass die Funktionen

$$f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1(x,y) = e^x \cos(y), f_2(x,y) = e^x \sin(y)$$

harmonisch sind. Kombinieren Sie diese Funktionen zu $f = f_1 + i f_2$. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ und entscheiden Sie, ob f holomorph ist.
b) Kann die Funktion $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^3 - y^3$ Real- oder Imaginärteil einer holomorphen Funktion sein? Ist $h(x,y) = x - y$ Realteil einer holomorphen Funktion?