Aufgaben zur Vorlesung *Algebraische und geometrische Strukturen in der Mathematik – Ein Überblick für Lehramtsstudierende*

Prof. Dr. Birgit Richter, Christian Gloy, Nils Matthes, Ann-Sophie Stuhlmann

Sommersemester 2016

Aufgabenblatt 7 zum 31. Mai 2016

1 (Niveaulinien)

(2 + 2 Punkte)

Skizzieren Sie jeweils drei verschiedene nichtleere Niveaulinien für den Real- und den Imaginärteil der Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$.
Für welche $z_0 \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ komplex differenzierbar? Zeichnen Sie wiederum drei Niveaulinien für diese Funktion.

2 (Rationale Funktionen)

(2 + 2 Punkte)

Es seien P und Q zwei komplexe Polynome. Sie wissen, dass $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ komplex differenzierbar ist auf der Menge $D = \{z \in \mathbb{C}, Q(z) \neq 0\}$.
a) Bestimmen Sie die komplexe Ableitung dieser Funktion.
b) Betrachten Sie den Spezialfall $P(z) = az + b$ und $Q(z) = cz + d$. Zeigen Sie, dass für alle z aus der oberen Halbebene $\mathcal{H}$ das Bild unter der Abbildung

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

wiederum in der oberen Halbebene liegt, falls die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

reell ist mit positiver Determinante.

3 (Komplexe Grenzwerte)

(2 + 2 Punkte)

Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine komplexe Zahlenfolge.
a) Zeigen Sie: Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen $c \in \mathbb{C}$ genau dann wenn, die reellen Folgen $(\mathrm{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergieren und zwar gegen $\mathrm{Re}(c)$ und $\mathrm{Im}(c)$.
b) Beweisen oder widerlegen Sie: Eine komplexe Folge der Form $(e^{i\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist genau dann konvergent, falls die reelle Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert.