Aufgaben zur Vorlesung *Algebraische und geometrische Strukturen in der Mathematik – Ein Überblick für Lehramtsstudierende*

Prof. Dr. Birgit Richter, Christian Gloy, Nils Matthes, Ann-Sophie Stuhlmann

Sommersemester 2016

Aufgabenblatt 6 zum 24. Mai 2016

1 (Geraden und Kreise)
Betrachten Sie die Teilmenge der komplexen Zahlen

$$\{z \in \mathbb{C} | az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0\}$$

für reelle a, c und $ac - b\bar{b} < 0$.
a) Zeigen Sie, dass L genau dann eine Gerade beschreibt, falls $a = 0$ ist.
b) Was passiert für nicht-triviale a? Machen Sie eine Skizze und geben Sie explizit den Kreis an, der entsteht.

(2 + 2 Punkte)

2 (Harmlos?)

(2 + 2 + 0 Punkte)

Es sei $I\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ die Abbildung, die ein $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf $\frac{1}{\bar{z}}$ schickt.
a) Bestimmen Sie die Werte $I(\frac{1}{n})$ und die Werte $I(\frac{i}{n})$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Was ist $I(1+i)$?
b) Beweisen Sie, dass das Bild der Einheitskreislinie

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$$

unter I, die gesamte Einheitskreislinie ist.
c) Was macht die Abbildung I geometrisch? Ein blöder (?) Witz sagt, dass MathematikerInnen diese Abbildung benutzen, um in der Wüste Löwen zu fangen. Wo muss man in der komplexen Ebene stehen, damit das nicht böse endet?

3 (Stereographische Projektion)

(2 + 2 Punkte)

Es sei

$$\mathbb{S}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ und wir nennen $N = (0, 0, 1)$ den Nordpol.
a) Es sei $s\colon \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ die Abbildung

$$s(x_1, x_2, x_3) := \frac{1}{1 - x_3}(x_1 + ix_2).$$

Was macht die Abbildung geometrisch? Fertigen Sie eine Skizze an.
b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \quad \psi(x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)$$

tatsächlich nur Werte im $\mathbb{R}^3$ der Länge 1 annimmt und dass ψ die inverse Abbildung zu s ist.

Bemerkung: Da sowohl s als auch ψ stetig sind, ist hiermit ein *Homöomorphismus* zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ gegeben, d. h. s ist eine stetige Abbildung, die bijektiv ist und die eine stetige Umkehrabbildung besitzt.