Aufgaben zur Vorlesung *Algebraische und geometrische Strukturen in der Mathematik – Ein Überblick für Lehramtsstudierende*

Prof. Dr. Birgit Richter, Christian Gloy, Nils Matthes, Ann-Sophie Stuhlmann

Sommersemester 2016

Aufgabenblatt 5 zum 10. Mai 2016

1 (Irreduzibel?)

(1+2+1 Punkte)

a) Es sei $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom dritten Grades. Kann p dann irreduzibel sein?
b) Wann ist ein Polynom $q(X) \in \mathbb{R}[X]$ zweiten Grades irreduzibel? Geben Sie ein explizites Kriterium an.
c) Wie sehen die irreduziblen Polynome in $\mathbb{C}[X]$ aus?

2 (Anwendung der Polynomdivision)

(2 + 2 Punkte)

a) Es sei L ein beliebiger Körper und $p(X), q(X)$ seien Polynome in $L[X]$, die ein Polynom $d(X) \in L[X]$ als grßten gemeinsamen Teiler haben. Zeigen Sie, dass es Polynome $r(X)$ und $s(X)$ in $L[X]$ gibt mit

$$d = rp + sq.$$

b) Wenden Sie das obige Verfahren an auf die reellen Polynome

$$p(X) = X^3 + 4X^2 - 5X, \quad q(X) = X^4 - X^3 - X^2 + 3X - 2.$$

3 ($\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ist einfach!)

(2 + 2 Punkte)

a) Berechnen Sie das Quadrat und das Inverse von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$