Aufgaben zur Vorlesung *Algebraische und geometrische Strukturen in der Mathematik – Ein Überblick für Lehramtsstudierende*

Prof. Dr. Birgit Richter, Christian Gloy, Nils Matthes, Ann-Sophie Stuhlmann

Sommersemester 2016

Aufgabenblatt 3 zum 26. April 2016

1 (Quadratwurzeln aus Primzahlen)

(1,5 + 1 + 1,5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ kein Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist. Sie dürfen hierfür benutzen, dass

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}, a, b, \in \mathbb{Q}\}$$

ist.
b) Beweisen Sie, dass $\sqrt{5}$ kein Element von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ist.
c) Es sei $p_1, p_2, p_3, \ldots$ eine Anordnung aller Primzahlen nach ihrer Größe, also $p_1 = 2$, $p_4 = 7$, etc. Gilt dann $\sqrt{p_{n+1}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$?

2 (Körpergrad)

(2 + 2 Punkte)

a) Es seien $L \subset E$ und $L \subset E'$ zwei Körpererweiterungen und die Körpergrade $[E : L]$ und $[E' : L]$ seien endlich und gleich. Gibt es dann einen Isomorphismus von Körpern zwischen E und E'? Beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.
b) Bestimmen Sie den Körpergrad von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Sie können das entweder elementar machen, indem Sie eine Basis hinschreiben und nachweisen, dass es eine ist, oder Sie überlegen sich, dass gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \cong (\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3})$ und benutzen eine passende Formel aus der Vorlesung.

3 (Adjungieren von Elementen)

(2 + 2 Punkte)

a) Es sei $L \subset E$ eine Körpererweiterung und $\varnothing \neq X \subset L$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $L(X) = L$ gilt.
b) Beweisen Sie, dass für eine Körpererweiterung $L \subset E$ und für zwei Elemente $w, w' \in E \setminus L$ mit der Eigenschaft $w - w' \in L$ gilt, dass die Körpererweiterungen $L(w)$ und $L(w')$ isomorph sind.