

Aufgaben zur Vorlesung *Algebraische und geometrische Strukturen in der Mathematik – Ein Überblick für Lehramtsstudierende*

Prof. Dr. Birgit Richter, Christian Gloy, Nils Matthes, Ann-Sophie Stuhlmann

Sommersemester 2016

Aufgabenblatt 2

zum 19. April 2016

1 (Ein Körper mit vier Elementen)

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Menge

$$\mathbb{F}_4 = \{0, 1, a, b\}.$$

Diese Menge habe vier Elemente, d. h. die Elemente $0, 1, a, b$ sind paarweise verschieden. Die 0 sei wirklich das additiv-neutrale Element und 1 das multiplikativ-neutrale Element.

Stellen Sie eine Additions- und Multiplikationstabelle für \mathbb{F}_4 auf, so dass Sie einen Körper erhalten. Beschreiben Sie, wie Sie auf Ihre Lösung kommen, indem Sie den Teil der Tabellen ausfüllen, der sofort durch die Körperaxiome festgelegt ist, und eine Diskussion der übrigen Einträge dokumentieren.

2 (Die Eulersche φ -Funktion)

(4 Punkte)

Die Eulersche φ -Funktion ordnet einer ganzen Zahl $n \geq 1$ die Anzahl $\varphi(n)$ aller ganzen Zahlen s zu mit $1 \leq s \leq n$, die zu n teilerfremd sind.

Bestimmen Sie $\varphi(6)$ durch explizites Abzählen der teilerfremden Zahlen zwischen 1 und 6 .

Es sei p eine Primzahl. Was ist $\varphi(p)$? Was ist $\varphi(p^\ell)$ für $\ell > 1$?

Es seien n und m zwei teilerfremde Zahlen. Beweisen Sie, dass $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ gilt.

Benutzen Sie die Ergebnisse, um mithilfe der Primfaktorzerlegung $\varphi(780)$ zu berechnen.

Erörtern Sie kurz, ob es sinnvoll ist, die Eulersche φ -Funktion im Schulunterricht zu thematisieren.

3 (explizite Wurzeln)

(2 + 2 Punkte)

Konstruieren Sie explizit die Quadratwurzel aus 3 und eine Quadratwurzel aus $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$, indem Sie annehmen, dass 3 bzw. $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ gegeben sind und die Menge $\{0, 1\}$. Führen Sie alle notwendigen Konstruktionsschritte nachvollziehbar durch.