Aufgaben zur Vorlesung *Algebraische und geometrische Strukturen in der Mathematik – Ein Überblick für Lehramtsstudierende*

Prof. Dr. Birgit Richter, Christian Gloy, Nils Matthes, Ann-Sophie Stuhlmann

Sommersemester 2016

Aufgabenblatt 12 zum 5. Juli 2016

1 (konzentrische Laurentzerlegung)

(1 + 2 + 1 Punkte)

Es sei

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3}.$$

Also hat f einfache Pole in $z = 1$ und $z = 3$. Stellen Sie jeweils die Laurentzerlegung auf
a) für $z \in B_1(0)$,
b) für $z \in K_{1,3}(0)$ und
c) für z mit $|z| > 3$.

2 (Trennen Sie das Unwesentliche von dem Wesentlichen!)

(1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils, welcher Typ einer isolierten Singularität vorliegt, und geben Sie in c) zusätzlich die Polordnung an.

a) $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$ in $z_0 = 0$,

b) $f(z) = \frac{z}{\sin(z)}$ in $z_0 = 0$,

c) $f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - 6z + 8}{(z-1)^3}$ in $z_0 = 1$ und

d) $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ in $z_0 = 0$.

3 (Laurententwicklung um einen Pol)

(2 + 2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z-i)^2}.$$

a) Drücken Sie $\frac{1}{z}$ im Kreisring $K_{0,1}(i)$ als Potenzreihe in $z - i$ aus.
b) Stellen Sie damit die Laurentzerlegung für f auf $K_{0,1}(i)$ auf und bestimmen Sie insbesondere den Koeffizienten a_{-1} der Laurentreihe. Das ist das Residuum von f in i.