Aufgaben zur Vorlesung *Algebraische und geometrische Strukturen in der Mathematik – Ein Überblick für Lehramtsstudierende*

Prof. Dr. Birgit Richter, Christian Gloy, Nils Matthes, Ann-Sophie Stuhlmann

Sommersemester 2016

Aufgabenblatt 11 zum 28. Juni 2016

1 (Noch einmal Cauchy)

(2 + 2 Punkte)

a) Zerlegen Sie $\frac{1}{z^2+2z}$ in eine Summe von Funktionen der Form $\frac{a}{z-b}$.
b) Berechnen Sie damit das Integral

$$\int_{\partial B_3(0)} \frac{e^z}{z^2+2z} dz,$$

indem Sie den Cauchyschen Integralsatz benutzen.

2 (Rekonstruktion von Funktionswerten)

(1 + 1 + 2 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und für $n \geqslant 0$ sei $f^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$.
a) Stellen Sie die Taylorreihe von f um $z_0 = 0$ auf.
b) Was ist der Konvergenzradius dieser Reihe?
c) Was ist $f(1)$?

3 (Liouville höheren Grades)

(4 Punkte)

Es sei f eine ganze Funktion und es gelte $|f(z)| \leqslant M|z|^n$ für alle z mit $|z| \geqslant R$ für ein $R > 0$. Zeigen Sie, dass f dann eine Polynomfunktion $z \mapsto \sum_{i=0}^k a_k z^k$ vom Grad höchstens n ist.

Hinweis: Machen Sie einen Induktionsbeweis. Der Fall $n = 0$ ist gerade der Satz von Liouville. Für den Induktionsschritt kann es helfen, die Hilfsfunktion

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z-0}, & \text{für } z \neq 0, \\ f'(0), & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

zu betrachten.