

Aufgaben zur Vorlesung *Algebraische und geometrische Strukturen in der Mathematik – Ein Überblick für Lehramtsstudierende*

Prof. Dr. Birgit Richter, Christian Gloy, Nils Matthes, Ann-Sophie Stuhlmann
Sommersemester 2016

Aufgabenblatt 10

zum 21. Juni 2016

1 (Kurvenintegrale in der Praxis)

(1 + 1 + 2 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

entweder direkt oder durch die Angabe einer Stammfunktion. Hierbei seien R, a und b reelle positive Zahlen.

- a) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = R \exp(it)$; $f(z) = \bar{z}$.
- b) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = R \exp(it)$; $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- c) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a \cos(t) + i b \sin(t)$; $f(z) = \operatorname{Re}(z)$. Skizzieren Sie in diesem Fall die Kurve γ .

2 (Doch nicht wegunabhängig!)

(2 + 2 Punkte)

Integrieren Sie die Funktion $z \mapsto |z|^2$ von $-i$ nach i über zwei verschiedene Wege,

- a) einmal direkt über die Strecke $[-i, i]$,
- b) und einmal über den rechten Halbkreisbogen des Einheitskreises.

3 (Ein Beispiel zum Cauchyschen Integralsatz)

(1 + 1 + 2 Punkte)

- a) Zeichnen Sie die Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t \exp(2\pi i t)$.
- b) Finden Sie eine möglichst einfache Kurve β , so dass $\beta * \gamma$ ein geschlossener Weg ist.
- c) Bestimmen Sie mithilfe des Cauchyschen Integralsatzes das Kurvenintegral $\int_{\gamma} z dz$, indem Sie $\int_{\beta} z dz$ berechnen.

(In diesem Fall hätten Sie natürlich auch direkt über Stammfunktionen argumentieren können.)