# Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2005

**Blatt 11** Abgabetermin: Freitag, 8.7. 2005

**Aufgabe 41** (Nicht-hausdorffscher Quotient $\tilde{X}/G$) 2 + 1 Punkte
Betrachten Sie die Operation der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ auf der punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, die durch

$$\varrho(t, (x, y)) = (2x, 1/2y)$$

bestimmt ist. Zeigen Sie

a) Diese Operation macht die Projektion $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \to (\mathbb{R}^2 \setminus 0)/\mathbb{Z}$ zu einer Überlagerung.

b) Der Quotient $(\mathbb{R}^2 \setminus 0)/\mathbb{Z}$ ist nicht hausdorffsch.

**Aufgabe 42** (Flächenüberlagerungen) 2 Punkte
Zeigen Sie, dass die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht $ng+1$, $F_{ng+1}$, die Fläche $F_{g+1}$ überlagert.

**Aufgabe 43** (Cayley Graphen) 1 + 1 + 1 + 1 Punkte
Es sei $G$ präsentiert als $G = \langle x_i, i \in I \mid r_j, j \in J \rangle$. Konstruieren Sie den folgenden Graphen: Für jedes Element in der Gruppe $G$ setzen Sie einen Punkt und Sie kleben eine Kante zwischen $g$ und $gx_i$ für jeden Erzeuger $x_i$. Der entstehende Graph heisst *Cayley Graph der Gruppe* $G$, $C_G$.

a) Zeigen Sie, dass $C_G$ zusammenhängend ist.

Klebt man jetzt für jede Relation $r_j$ eine 2-Scheibe ein, so erhält man einen Raum, $\widetilde{X}_G$. Lassen Sie $G$ auf $\widetilde{X}_G$ operieren, indem Sie für ein $g \in G$ einen Punkt $g'$ auf $gg'$ abbilden und eine Kante zwischen $g'$ und $g'x_i$ auf die Kante zwischen $gg'$ und $gg'x_i$ schicken.

b) Zeigen Sie, dass diese Operation wohldefiniert auf $\widetilde{X}_G$ fortgesetzt werden kann.

c) Beweisen Sie, dass diese Operation eine Überlagerung $\widetilde{X}_G \to \widetilde{X}_G/G$ ergibt.

d) Identifizieren Sie $\widetilde{X}_G/G$ mit dem Raum $X_G$, den wir in der Vorlesung konstruiert haben. (Wenn Ihnen beliebige Präsentierungen nicht geheuer sind, dann nehmen Sie an, dass die Präsentierung endlich ist.)

**Aufgabe 44** (Zurückziehen von Überlagerungen) 1 + 1 Punkte
Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f \colon Y \to X$ eine stetige Abbildung. Betrachten Sie den pullback $\tilde{Y} =: f^*(p)$ des inversen Systems

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} = f^*(p) \arrow[r, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[d, dotted, "\tilde{p}"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

und zeigen Sie, dass

a) $\tilde{p}$ wiederum eine Überlagerung ist mit derselben typischen Faser wie $p$ und dass

b) $\tilde{f}$ eine Abbildung von Überlagerungen ist.

**Kür-Aufgabe** (Stetige Automorphismen von Tori) 1+1 Pseudopunkte
Der $n$-Torus $T^n = (\mathbb{S}^1)^n$ hat eine natürliche Gruppenstruktur. Identifizieren Sie die Gruppe aller stetigen Automorphismen von $T^n$. Betrachten Sie dazu zu einem solchen Automorphismus $f \colon T^n \to T^n$ die eindeutige Hochhebung $F$ von $f \circ p_2$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, dotted, "F"] \arrow[d, "p_2"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "p_1"] \\ T^n \arrow[r, "f"] & T^n \end{tikzcd}$$

mit $F(0) = 0$. Hierbei sei $p_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ und $p_2(x_1, \ldots, x_n) = (\exp(2\pi i x_1), \ldots, \exp(2\pi i x_n))$.

a) Zeigen Sie, dass $F$ linear ist.

b) Bestimmen Sie damit die stetigen Automorphismen von $T^n$, indem Sie beweisen, dass $F$ und $f$ sich gegenseitig bestimmen.