Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2005

Blatt 10 Abgabetermin: Freitag, 1.7. 2005

Aufgabe 37 (Komplexe Polynome) 2 Punkte

Betrachten Sie ein komplexes Polynom p vom Grad $n \geqslant 1$. Mit K bezeichnen wir die Menge der kritischen Werte von p. Beweisen Sie, dass die Einschränkung von p auf $\mathbb{C} \setminus p^{-1}K$ eine n-blättrige Überlagerung von $\mathbb{C} \setminus p^{-1}K$ auf $\mathbb{C} \setminus K$ ist.

Aufgabe 38 (Kompaktheit, T_2 und Konstruktionen) 1 + 1 + 1 + 1 Punkte

Es sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung.

a) Ist X kompakt und p endlich-blättrig, so ist $\widetilde{X}$ ebenfalls kompakt.

b) Ist X hausdorffsch, dann auch $\widetilde{X}$.

c) Sind $p_1 : \widetilde{X} \to X$ und $p_2 : \widetilde{Y} \to Y$ Überlagerungen, ist dann $(p_1, p_2) : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$ eine Überlagerung?

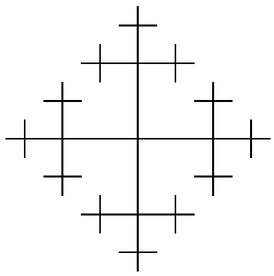
d) Sind $p : \widetilde{X} \to X$ und $q : \widetilde{\widetilde{X}} \to \widetilde{X}$ endlich-blättrige Überlagerungen, ist dann $p \circ q$ eine Überlagerung?

Aufgabe 39 ($SU(2)$ über $SO(3)$) 2 Punkte

Zeigen Sie, dass man $SU(2)$ als Überlagerung der $SO(3)$ auffassen kann. Benutzen Sie dazu die Abbildung $p : \mathbb{S}^3 \to SO(3)$, die einen Vektor v auf die Konjugation $x \mapsto vxv^{-1}$ abbildet. Identifizieren Sie damit $SO(3)$ als projektiven Raum. (Vgl. Kür-Aufgabe von Blatt 4.)

Aufgabe 40 (Universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$) 3 Punkte

Arbeiten Sie das folgende Beispiel aus der Vorlesung aus. Wir hatten einen Raum $\widetilde{X}$ über $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ als direkten Limes $\widetilde{X} = \varinjlim X_n$ konstruiert. Zeigen Sie, dass $\widetilde{X}$ eine triviale Fundamentalgruppe hat.

$X_3 =$ 

Kür-Aufgabe (Linsenräume) 2 + 2 Pseudopunkte

Es sei m eine ganze Zahl und $(q_1, \ldots, q_n)$ seien ganze Zahlen, die teilerfremd sind zu m. Wir wählen $\zeta = \exp(2\pi i/m)$ als primitive m-te Einheitswurzel und lassen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ operieren, indem wir definieren

$$\varrho(\zeta; z_1, \ldots, z_n) = (\zeta^{q_1} z_1, \ldots, \zeta^{q_n} z_n).$$

Der Quotientenraum $\mathbb{S}^{2n-1}/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ heisst Linsenraum und wird häufig mit $L(m; q_1, \ldots, q_n)$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass diese Operation eigentlich diskontinuierlich ist. Insbesondere ist $\mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow L(m; q_1, \ldots, q_n)$ eine Überlagerung.

b) Für $n = 2$ betrachtet man häufig $L(m, q) := L(m; 1, q)$. Zeigen Sie, dass $L(m, q)$ homöomorph ist zu $L(m, q')$, falls $q' \equiv \pm q^{\pm 1}$ mod m. (Die Umkehrung gilt auch, ist aber schwierig.)