**Wintersemester 05/06**

# Seminar des Schwerpunktes Algebra und Zahlentheorie für Studierende der LO

Prof. Dr. Dorothea Bahns, Birgit Richter, Christoph Schweigert, Helmut Strade

(1) **Symmetrien in der Ebene.** Leiten Sie die Klassifikation der endlichen Untergruppen der orthogonalen Gruppe der Ebene her [GB, 2.1,2.2] und beweisen Sie die Klassifikation der Isometrien der Ebene [A, Kapitel 5 §§1,2, Hauptsatz (2.2)].

*Aus diesem Vortrag kann man eine Staatsexamensarbeit entwickeln, indem man genauer beschreibt* [GB, S.9]*, was Diedergruppen mit Kaleidoskopen zu tun haben und indem man die Klassifikation der sogenannten Fries- und Ornamentgruppen ausarbeitet.*

(2) **Endliche Dreh-Untergruppen der $O(3)$.** Wiederholen Sie kurz die Fakten über orthogonale Abbildungen des Raumes, die in [GB, 2.3] behandelt werden und beweisen Sie die Klassifikation der endlichen Dreh-Untergruppen von $O(3)$ [GB, 2.4].

(3) **Endliche Untergruppen der $O(3)$.** Erweitern Sie das Klassifikationsresultat auf allgemeine endliche Untergruppen der orthogonalen Gruppe des Raumes und beweisen Sie [GB, Theorem 2.5.2]. Erklären Sie uns, was kristallographische Gruppen sind und beschreiben Sie die endlichen kristallographischen Untergruppen der $O(3)$ [GB, 2.6]

*Die Vorträge 2) und 3) lassen sich zu einigen Staatsexamensarbeiten ausbauen, indem man für konkrete Polyeder (z.B. Rhombendodekaeder, Kuboktader etc) die Symmetriegruppen explizit bestimmt. Die Techniken aus Vortrag 4) sind dafür relevant.*

(4) **Fundamentalbereiche.** Um die Symmetriegruppen eines gegebenen Objekts zu bestimmen, ist es nützlich, sich Fundamentalbereiche einer möglichen Operation zu verschaffen. Referieren Sie über [GB, 3] und führen Sie Aufgabe 3.11 oder 3.12 aus.

(5) **Eulers Formel und Fullerene.** Beweisen Sie Eulers Formel über die Beziehung von Flächen, Kanten und Ecken in einfachen Polyedern [C, 1.4–1.6]. Erläutern Sie die Folgerung für einfache Polyeder, in denen von jeder Ecke drei Kanten ausgehen [St, S.45]. Zeigen Sie damit, dass Fullerene immer genau 12 Fünfecke als Flächen enthalten. Beschreiben Sie die Form des Fullerens $C_{60}$, indem Sie es aus einem Ikosaeder konstruieren und zeigen Sie, dass $C_{60}$ dieselbe Symmetriegruppe hat wie ein Ikosaeder. [St, §1.10]

*In einer Staatsexamensarbeit kann man die Symmetriegruppen anderer Fullerene bestimmen. Eine andere mögliche Arbeit wäre, eine Beschreibung des $C_{60}$ über die alternierende Gruppe $A_5$ zu geben und damit die Eulerformel zu verifizieren.*

In höheren Dimensionen schränken wir uns auf endliche Untergruppen der orthogonalen Gruppe ein, die von Spiegelungen erzeugt sind.

(6) **Coxetergruppen** Definieren Sie, was Wurzeln sind, und beschreiben Sie die Eigenschaften von Wurzelsystemen anhand von [GB, 4.1 bis einschließlich 4.1.8]. Erläutern Sie uns, wie Wurzelsysteme helfen, die zugehörige Spiegelungsgruppe mit ihren Eigenschaften zu verstehen und definieren Sie den Begriff der Coxetergruppe. Führen Sie das Beispiel der Diedergruppe der Ordnung 8 vor.

(7) **Fundamentalbereiche für Coxetergruppen** Besprechen Sie noch die Eigenschaften von Wurzelsystemen aus [GB, 4.1.9 bis einschließlich 4.1.12]. Beschreiben Sie dann, wie Fundamentalbereiche für Coxetergruppen beschaffen sind [GB, 4.2 bis einschließlich 4.2.5]. Stellen Sie uns das Beispiel der Symmetriegruppe des Würfels oder des Ikosaeders explizit vor [GB, S. 47–49].

(8) **Coxeter-Graphen** Erklären Sie uns, was Coxetergraphen und ihre zugehörigen quadratischen Formen sind und wie man Coxetergraphen aus Coxetergruppen erhält. Beweisen Sie, dass Coxetergruppen mit gleichem Graph konjugiert sind in der orthogonalen Gruppe. Erläutern Sie die Klassifikation aller zusammenhängender positiv definiter Coxetergraphen aus der Graphik [GB, 5.3] anhand von [GB, Theorem 5.1.7] (Sie werden nicht genügend Zeit haben, das Theorem vollständig zu beweisen, aber beweisen Sie alles in 5.1 bis [GB, 5.1.5] und leiten Sie her, dass die Graphen aus dem Klassifikationsresultat alle positiv definit sind.) Hintergrundmaterial ist [GB, 5.1].

## Literatur


[A] Michael Artin, Algebra, Birkhäuser 1993

[C] H. S. M. Coxeter, Regular Polytopes, Dover 1963

[GB] L. C. Grove, C. T. Benson, Finite Reflection Groups, , Springer 1985

[St] S. Sternberg, Groups Theory and Physics, Cambridge University Press 1994