

Aufgabe 1.

① Für $A = \{1, 2, 4\}$ ist $A + A = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ und

$A - A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, also $|A + A| = 6$ und $|A - A| = 7$.

② Idee: Setze $B_d = A^d \subseteq \mathbb{Z}^d$. Dann $B_d + B_d = (A + A)^d$

und $B_d - B_d = (A - A)^d$, also $|B_d + B_d| = 6^d$, $|B_d - B_d| = 7^d$.

③ Betrachte nun $A_d = \{a_0 + a_1 \cdot 10 + \dots + a_{d-1} \cdot 10^{d-1} : a_0, \dots, a_{d-1} \in A\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Offbar $A_d + A_d = \{s_0 + s_1 \cdot 10 + \dots + s_{d-1} \cdot 10^{d-1} : s_0, \dots, s_{d-1} \in A + A\}$,

also $|A_d + A_d| = 6^d$ (eindeutige Darstellung im Dezimalsystem!).

Analog $A_d - A_d = \{t_0 + t_1 \cdot 10 + \dots + t_{d-1} \cdot 10^{d-1} : t_0, \dots, t_{d-1} \in A - A\}$

und demnach $|A_d - A_d| = 7^d$ (für " $\geq$ " wende die Eindeutigkeit

im Dezimalsystem auf $A_d - A_d + 4(1 + 10 + \dots + 10^{d-1})$ an.

Aufgabe 2

Man zeigt $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Nach Folgerung 1.7 ist $\delta[A] \leq \sigma[A]^2 = 1$ und $\delta[A] \geq 1$ ist klar.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Sei $x \in A$ beliebig und setze $H = A - x$. Wir müssen zeigen, dass H eine Untergruppe ist. Wegen $|H - H| = |A - A| = |A| = |H|$ und dass $H \subseteq H - H$ (da $0 = x - x \in H$) ist $H - H = H$. Also ist $-H \subseteq H - H = H$, d.h. H ist unter Inversenbildung abgeschlossen. Folglich $H + H = H - (-H) \subseteq H - H = H$, d.h. H ist auch unter Addition abgeschlossen.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Da $5A - 7A = (5H - 7H) - 2x = H - 2x$ ist in der Tat $|5A - 7A| = |H - 2x| = |H| = |A|$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Sei $a \in A$ beliebig. Da $A - 7a \subseteq A - 7A \subseteq (5A - 7A) - 4a$ ist $|A| \leq |A - 7A| \leq |5A - 7A|$, also $|A - 7A| = |A|$. Analog $|5A - A| = |A|$.

Die Dreiecksungleichung von Ruzsa impliziert also

$$|A||7A| = |7A||5A-A| \leq |5A-7A||A-7A| = |A|^2,$$

d.h. $|7A| \leq |A|$. Andererseits ist $|A| \leq |A+A| \leq |7A|$ klar.

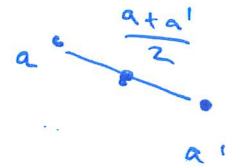
Insgesamt $|A| = |A+A|$, d.h. $\sigma[A] = 1$.

Aufgabe 3.

Anstatt $A + A$ betrachten wir $M(A) = \left\{ \frac{a+a'}{2} : a, a' \in A \right\}$. ("Mittelpunkte")

Offenbar ist $|M(A)| = |A + A|$.

Die Behauptung ist zu folgendem äquivalent.



Lemma. Wenn die Punkte einer additiven Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ nicht kollinear sind, dann $|M(A)| \geq 3|A| - 3$.

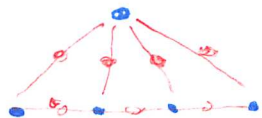
Beweis. Induktion nach $|A|$.

$|A| \leq 2$ | Nichts zu zeigen, da A kollinear.

Schritt | Nun sei $|A| \geq 3$. Lege das Koordinatensystem so, dass es genau einen Punkt $a \in A$ gibt, für den die y -Koordinate maximal ist. Setze $A' = A \setminus \{a\}$.

Fall 1: Die Punkte in A' sind kollinear.

A



Da a nicht auf der Geraden liegt, gilt

$$|M(A)| = |M(A')| + |A'| + 1.$$

Wegen $|B+B| \geq 2|B|-1$ für alle additiven Mengen $B \subseteq \mathbb{R}$ (*)

ist $|M(A')| \geq 2|A'|-1$, also

$$|M(A)| \geq (2|A'|-1) + (|A'|+1) = 3|A'| = 3|A|-3.$$

Warum gilt (*)? Wenn $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ mit $b_1 < \dots < b_k$,

dann sind $b_1+b_1 < \dots < b_1+b_k < \dots < b_k+b_k$

genau $2k-1$ verschiedene Elemente von B .

Nicht Fall 1
Fall 2. $\sqrt{\quad}$ Seien g, h die in a beginnenden Strahlen,

die den kleinsten A enthaltenden Winkelbereich

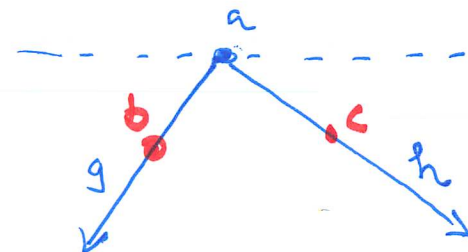
begrenzen. Seien $b \in g \cap A$ und $c \in h \cap A$

möglichst nahe bei A . Es gilt $b \neq c$, denn sonst $g = h$

und die Punkte in A wären kollinear. Nun sind $a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}$

drei verschiedene Punkte in $M(A) \setminus M(A')$ und die Ind. Ann.

liefert $|M(A)| \geq |M(A')| + 3 \geq 3|A'| = 3|A|-3.$



Aufgabe 4.

Wir zeigen allgemeines $|A+B| \leq |A-B|^{3/2}$ für je zwei additive Mengen A, B . Wegen $|A+B| \leq |A||B|$ folgt dies direkt aus Lemma 1.12.