Additive Kombinatorik. Übungsblatt 5

1. Aufgabe.

$$\sum_{r\in\hat{G}} |\hat{A}(r)|^2 \, |\hat{B}(r)|^2 = \sum_{r\in G} \; \sum_{a,a'\in A,\, b,b'\in B} r(a)\cdot r(-a')\cdot r(b)\cdot r(-b')$$

$$= \sum_{\substack{a,a'\in A\\ b,b'\in B}} \; \sum_{r\in\hat{G}} r(a-a'+b-b') = |G| \, E(A,B).$$

2. Aufgabe.

Setze $a = |\mathrm{supp}(f)| > 0$, $b = |\mathrm{supp}(\hat{f})|$ und $S = \sum_{x\in G} |f(x)|$.

Nun $$bS^2 \geq \sum_{r\in\hat{G}} |\hat{f}(r)|^2 = |G| \sum_{x\in G} f(x)^2 \underset{\text{CSU}}{\geq} \frac{|G|}{a}\cdot S^2,$$

also $ab \geq |G|$.

3. Aufgabe

Es sei Γ dieses Gitter. Da $\lambda(\mathbb{R}^2/\Gamma) \leqslant \left\| \begin{matrix} 0 & n \\ 1 & f \end{matrix} \right\| = n$ und $\lambda(B) = 2\pi n$

ist $\lambda(B) = 2\pi n > 4\,\lambda(\mathbb{R}^2/\Gamma)$ (wenn man mit der besseren Menge

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 2n\}$ arbeitet). Also gibt's $(x,y) \in \Gamma$

mit $0 < x^2+y^2 < 2n$. Wähle $a,b \in \mathbb{Z}$ mit $(x,y) = a\cdot(0,n) + b(1,f)$.

Nun ist $x^2+y^2 = b^2 + (an+bf)^2 \equiv b^2(1+f^2) \equiv 0 \pmod{n}$.

Also $x^2+y^2 = n$.

Bemerkung. In der Zahlentheorie lernt man: Eine solche Zahl n gibt's genau dann, wenn n weder durch 4 noch durch eine Primzahl q mit $q \equiv 3 \pmod{4}$ teilbar ist.

Wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ eine Primzahl ist, kann man

$f = (\frac{p-1}{2})!$ nehmen, denn dann ist

$f^2 \equiv 1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdot \ldots \cdot (p-1) \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

4. Aufgabe.

Es sei Γ das Gitter und $B = \{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : w^2+x^2+y^2+z^2 < 2n\}$.

Wegen

$$\lambda(\mathbb{R}^4/\Gamma) \leq \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & f & g \\ 0 & 1 & g & -f \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{matrix} \right\| = n^2$$

und

$$\lambda(B) = \frac{\pi^2}{2} \cdot (\sqrt{2n})^4 = 2\pi^2 n^2 > 16 n^2$$

gibt's nach Minkowskis erstem Satz einen Punkt $(w,x,y,z) \in (B \cap \Gamma) \setminus \{(0,0,0,0)\}$

Wähle $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ mit

$$(w,x,y,z) = a\cdot(1,0,f,g) + b(0,1,g,-f) + c(0,0,n,0) + d(0,0,0,n).$$

Wegen

$$w^2+x^2+y^2+z^2 \equiv a^2+b^2+(af+bg)^2+(ag-bf)^2$$
$$\equiv (a^2+b^2)(1+f^2+g^2) \equiv 0 \pmod{n}$$

und $0 < w^2+x^2+y^2+z^2 < 2n$ ist

$$\boxed{w^2+x^2+y^2+z^2 = n}$$

Ausblick. (1) Es gibt genau dann f.g., wenn n nicht durch 4 teilbar ist (!)

(2) Da $2(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b)^2+(a-b)^2+(c+d)^2+(c-d)^2$

ist also jede natürliche Zahl Summe von 4 Quadratzahlen. (Lagrange)

(3) Gauß und Jacobi zeigten:

$$\#\{(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 : n = a^2+b^2+c^2+d^2\} = \begin{cases} 8\sigma(n) & \text{wenn } 4 \nmid n \\ 8\sigma(n) - 32\sigma(n/4) & 4 \mid n \end{cases}$$

wobei $\sigma(n) = \sum_{m \mid n} m$.

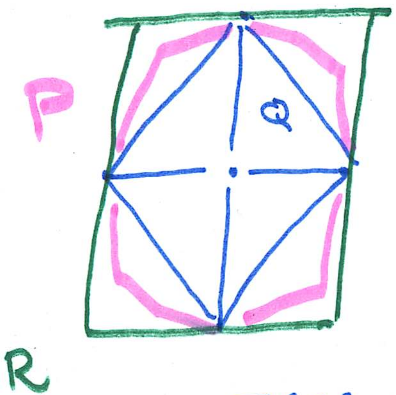
(4) Gauß zeigte: Eine natürliche Zahl n ist genau dann als Summe von drei Quadratzahlen darstellbar, wenn n nicht von der Form $4^a(8b+7)$ ist. (!!!)

5. Aufgabe

$B = (-1,1)^5$ tut's.

6. Aufgabe.

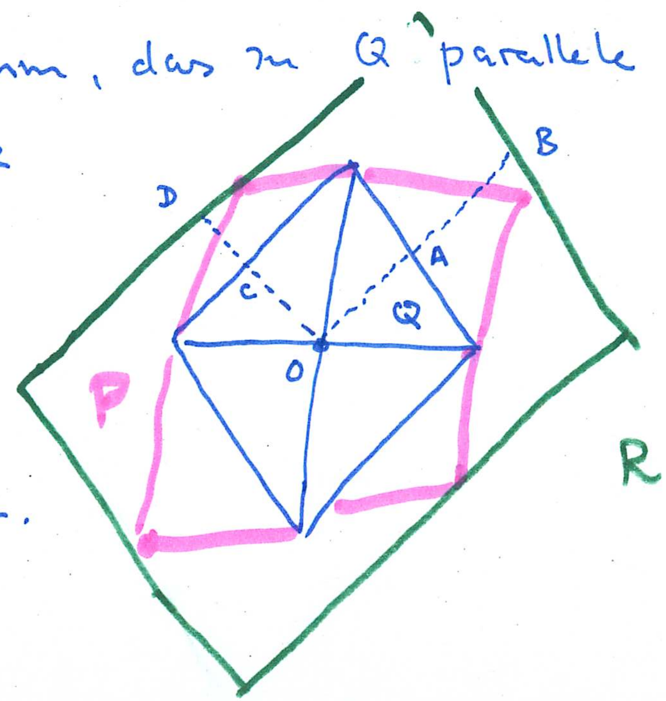
Es sei Q das größte P einbeschriebene Parallelogramm mit dem gleichen Mittelpunkt von P. Wenn $[P] \geq \sqrt{2}\,[Q]$ nimm dieses Parallelogramm R:



Hier $[R] = 2[Q] \leq \sqrt{2}\,[P]$

ab jetzt gelte $[P] \leq \sqrt{2}\cdot[Q]$. Sei R das kleinste P enthaltende Parallelogramm, das zu Q parallele Seiten hat. Im Bild sehe

$$x = \frac{OB}{OA}, \quad y = \frac{OD}{OC}.$$



Dann $[P] \geq \frac{x+y}{2}[Q]$

$\geq \sqrt{xy}\,[Q]$, also $xy \leq 2$.

Folglich $[R] = xy[Q] \leq \sqrt{2}\cdot\sqrt{xy}\,[Q]$

$\leq \sqrt{2}\,\frac{x+y}{2}[Q] \leq \sqrt{2}\cdot[P]$.