Additive Kombinatorik, Blatt 4.

Aufgabe 1.

Für $r \in \widehat{G}$, $s \in \widehat{H}$ ist $(x,y) \mapsto r(x)s(y)$ ein Element von $\widehat{G \times H}$, für das wir hier $\varphi(r,s)$ schreiben. Offenbar ist $(r,s) \mapsto \varphi(r,s)$ ein Homomorphismus von $\widehat{G} \times \widehat{H}$ nach $\widehat{G \times H}$.

φ ist injektiv, denn: Sei $\varphi(r,s) = 0_{\widehat{G \times H}}$. Für alle $x \in G$ ist dann

$1 = \varphi(r,s)(x,0) = r(x)\, s(0) = r(x)$, also $r = 0_{\widehat{G}}$ und analog $s = 0_{\widehat{H}}$.

φ ist surjektiv, denn: Sei $t \in \widehat{G \times H}$. Definiere $r : G \to S^1$, $s : H \to S^1$

durch $r(x) = t(x,0)$, $s(y) = t(0,y)$. Dann $r \in \widehat{G}$, $s \in \widehat{H}$

und $t(x,y) = t(x,0) \cdot t(0,y) = r(x)s(y)$ für alle $x \in G$, $y \in H$,

d.h. $t = \varphi(r,s) \in \operatorname{Im}(\varphi)$.

Insgesamt zeigt φ, dass $\widehat{G} \times \widehat{H} \cong \widehat{G \times H}$.

2. Aufgabe.

Setze $\alpha = \varphi(0)$ und $r(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\alpha}$ für alle $x \in G$.

Für alle $x, y \in G$ ist $(x+y)+0 = x+y$, also

$\varphi(x+y) \cdot \varphi(0) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ (da φ ein F_2-Homom. ist)

und mithin $r(x+y) = \dfrac{\varphi(x+y)\,\varphi(0)}{\alpha^2} = \dfrac{\varphi(x)}{\alpha} \cdot \dfrac{\varphi(y)}{\alpha} = r(x)\,r(y)$,

d.h. $r \in \widehat{G}$.

Aufgabe 3.

Definiere $\eta : \widehat{G/H} \longrightarrow \hat{G}$ durch $\eta(r)(x) = r(x+H)$ für alle $r \in \widehat{G/H}$, $x \in G$. Dies ist injektiv, denn: Für $r, s \in \widehat{G/H}$ gelte $\eta(r) = \eta(s)$. Für alle $x \in G$ ist dann $r(x+H) = \eta(r)(x) = \eta(s)(x)$ $= s(x+H)$, also $r = s$.

Außerdem ist $\mathrm{Im}(\eta) \subseteq \hat{H}$, denn: Seien $r \in \widehat{G/H}$, $h \in H$ bel. Nun $\eta(r)(h) = r(h+H) = r(H) = 1$. Da h bel. war zeigt dies $\eta(r) \in H^\perp$.

Schließlich ist $\hat{H} \subseteq \mathrm{Im}(\eta)$, denn: Sei $\varphi \in H^\perp$. Gilt $x + H = y + H$ für $x, y \in G$, so ist $x - y \in H$, also $\varphi(x-y) = 1$ (da $\varphi \in H^\perp$), d.h. $\varphi(x) = \varphi(y)$. Es ist also wohldefiniert, $r(x+H) = \varphi(x)$ zu setzen. Offenbar $r \in \widehat{G/H}$ und $\eta(r) = \varphi$.

Insgesamt bezeugt η, dass $\widehat{G/H} \cong H^\perp$. Folglich $G/H \cong H^\perp$ und $|H||H^\perp| = |H||G/H| = |G|$.

Aufgabe 4.

Man kann nun $H^{\perp\perp} = \{ x \in G' : \forall r \in \hat{H} \quad r(x) = 1 \}$

bilden. Aus Aufgabe 3 folgt $|H^{\perp}|\,|H^{\perp\perp}| = |\hat{G}| = |G| = |H^{\perp}|\,|H|$,

also $|H^{\perp\perp}| = |H|$ (beachte $\hat{\hat{G}} \cong G$). Da aber $H \subseteq H^{\perp\perp}$ klar

ist zeigt dies $H^{\perp\perp} = H$. Wie im Beweis der Orthogonalitätsrelation

ergibt sich

$$\sum_{r \in H^{\perp}} r(x) = \begin{cases} |H^{\perp}| & \text{wenn } x \in H \\ 0 & \text{wenn } x \in G \setminus H \end{cases} \quad \text{.......} (*)$$

[Warum? Die obere Aussage ist klar. Sei nun $x \in G \setminus H$. Wegen $x \notin H^{\perp\perp}$

gibt's $s \in H^{\perp}$ mit $s(x) \neq 1$. Aber

$$(s(x) - 1) \sum_{r \in H^{\perp}} r(x) = \sum_{r \in H^{\perp}} (r \cdot s)(x) - \sum_{r \in H^{\perp}} r(x) = 0. \quad]$$

Nun sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion.

Wie immer ist

$$\sum_{r \in H^\perp} \hat{f}(r) = \sum_{r \in H^\perp} \sum_{x \in G} f(x) \overline{r(x)}$$

$$= \sum_{x \in G} f(x) \cdot \overline{\sum_{r \in H^\perp} r(x)}$$

$$\stackrel{(*)}{=} |H^\perp| \sum_{x \in H} f(x) .$$

5. Aufgabe

(a) $\hat{f}(0) = \sum_{x \in F} f(x) = |A|^2$. Sei nun $r \in \hat{F} \setminus \{0\}$. Da $f = \sum_{a \in A} (Aa)$

ist $|\hat{f}(r)| \leq \sum_{a \in A} |(Aa)(r)|$. Für $a \in A$ sei $ar \in \hat{F}$ durch

$(ar)(y) = r(ay)$ für alle $y \in F$ definiert. Nun

$$(Aa)(r) = \sum_{x \in F} (Aa)(x)\overline{r(x)} = \sum_{y \in F} (Aa)(ya)\overline{r(ya)}$$

$$= \sum_{y \in F} A(y)\overline{(ar)(y)} = \hat{A}(ar),$$ also insgesamt

$$|\hat{f}(r)| \leq \sum_{a \in A} |\hat{A}(ar)| \leq |A|^{1/2}\Big(\sum_{a \in A} |\hat{A}(ar)|^2\Big)^2$$ (nach CSU).

Nun ist $a \mapsto ar$ eine injektive Abb. von A nach $\hat{F}$, denn:

Seien $a, a' \in A$ so beschaffen, dass $ar = a'r$. Für alle $y \in F$

ist dann $r(ay) = (ar)(y) = (a'r)(y) = r(a'y)$, d.h. $r((a-a')y) = 1$.

Falls $a \neq a'$ folgt $r(z) = 1$ für alle $z \in F$, d.h. $r = 0$, Wid.

Insgesamt $$|\hat{f}(r)| \leq |A|^{1/2}\Big(\sum_{s \in \hat{F}} |\hat{A}(s)|^2\Big)^{1/2} \underset{\text{Parseval}}{=} |A|^{1/2}\Big(|F| \sum_{a \in A} |A(a)|^2\Big)^{1/2}$$

$$= |A|^{1/2} \left(|A| |F| \right)^{1/2} = |A| \, |F|^{1/2} .$$

(b) $$\sum_{r \in \hat{F}} |\hat{f}(r)|^2 = |F| \sum_{x \in F} f(x)^2 \qquad \text{(Parseval)}$$

$$= |F| \, \left| \{ (a_1, a_2, a_3, a_4) \in A^4 : a_1 a_2 = a_3 a_4 \} \right|$$

$$\leq |F| \, |A|^3 ,$$ denn wegen $0 \notin A$ gibt's für gegebene a_1, a_2, a_3 nur eine Möglichkeit für a_4.

(c) Aus der Inversionsformel folgt

$$|F| \, (f * f * f)(x) = \sum_{r \in \hat{F}} \widehat{f * f * f}(r) \cdot r(x)$$

$$= \sum_{r \in \hat{F}} (\hat{f}(r))^3 \, r(x)$$

$$\geq \hat{f}(0)^3 - \sum_{r \neq 0} |\hat{f}(r)|^3$$

$$\overset{\text{Teil a}}{>} |A|^6 - |A| \, |F|^{1/2} \sum_{r} |\hat{f}(r)|^2$$

$$\overset{\text{Teil (b)}}{\geq} |A|^6 - |A| \, |F|^{1/2} \cdot |A|^3 |F|$$

$$= |A|^4 \left(|A|^2 - |F|^{3/2} \right) .$$

(d) Es gelte nun $|A| > |F|^{3/4}$, d.h. $|A|^2 > |F|^{3/2}$.

Ferner sei $x \in F$ bel. Nach Teil (c) ist

$$(f * f * f)(x) > |A|^4 \, |F|^{-1} (|A|^2 - |F|^{3/2}) > 0.$$

Folglich gibt's $x_1, x_2, x_3 \in F$ mit

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{und} \quad f(x_1), f(x_2), f(x_3) > 0.$$

Wähle nun $a_1, \dots, a_6 \in A$ mit $x_i = a_{2i-1} a_{2i}$ für $i = 1, 2, 3$.

Nun $x = a_1 a_2 + a_3 a_4 + a_5 a_6$.