Additive Kombinatorik, 3. Übungsblatt

1. Aufgabe.

Aus dem Lemma von Plünnecke folgt $|2A-2A| \le K^4|A|$.

Lemma 4.7 liefert eine Menge $X \subseteq A-2A$ mit $|X| \le K^4$ und

$$A - 2A \subseteq A - A + X \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Somit $\quad 2A - 2A \subseteq 2A - A + X$. Nach (1) ist aber auch $2A - A \subseteq A - A - X$.

Insgesamt

$$(A-A) + (A-A) \subseteq (A-A) + (X-X).$$

Also ist

$$H = A - A + \langle X \rangle$$

eine Untergruppe von G. Wegen $|A-A| \le K^2|A|$ und $\langle X \rangle \le t^{|X|} \le t^{K^4}$ ist $|H| \le K^2 t^{K^4} |A|$. Ist $x \in A$ beliebig, so gilt $A - x \subseteq H$,

d.h. $\quad A \subseteq H + x$.

2. Aufgabe.

Setze $A = \{0, 1, r+1\}$ und $B = \{0, 1, r+2\}$.

Beh. A und B sind F_r-isomorph.

Beweis. Definiere $\varphi : A \to B$ durch $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(r+1) = r+2$.

Gilt $x_1 + \dots + x_r = x_1' + \dots + x_r'$ mit $x_1, \dots, x_r, x_1', \dots, x_r' \in A$, so sind die Multimengen $\{\{x_1, \dots, x_r\}\}$ und $\{\{x_1', \dots, x_r'\}\}$ gleich und es folgt $\sum_i \varphi(x_i) = \sum_i \varphi(x_i')$. Also ist φ ein F_r-Homomorphismus. Analog ist φ^{-1} auch ein F_r-Homomorphismus.

Beh. A und B sind nicht F_{r+1}-isomorph.

Beweis. Angenommen $\varphi : A \to B$ wäre ein F_{r+1}-Isomorphismus.

Da $\underbrace{1 + \dots + 1}_{r+1} = (r+1) + (\underbrace{0 + \dots + 0}_{r})$ folgt $(r+1)\varphi(1) = \varphi(r+1) + r\varphi(0)$.

Mithin $\varphi(r+1) \equiv \varphi(0) \pmod{r+1}$, d.h. $\{\varphi(0), \varphi(r+1)\} = \{1, r+2\}$ und $\varphi(1) = 0$. Also $\varphi(r+1) + r\varphi(0) = 0$, Wid.

Aufgabe 3.

Aus Lemma 5.4 folgt $|A+A| = |B+B|$ und $|A-A| = |B-B|$.

Mithin $\sigma[A] = \sigma[B]$ und $\delta[A] = \delta[B]$.

Ist $\varphi : A \to B$ ein F_2-Isomorphismus, so ist

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \longmapsto (\varphi(a_1), \varphi(a_2), \varphi(a_3), \varphi(a_4))$$

eine Bijektion zwischen

$$\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in A^4 : a_1 + a_2 = a_3 + a_4\}$$

und

$$\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in B^4 : b_1 + b_2 = b_3 + b_4\}.$$

Somit $E(A) = E(B)$.

4. Aufgabe.

Schreibe $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Für $0 \leq x < p$ sei $f(x) \in [2r]^m$ derjenige Punkt $f(x) = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ für den gilt:

Für alle $\mu \in [m]$ hat $x b_\mu + p\mathbb{Z}$ einen Repräsentanten in $\left[(\xi_\mu - 1) \cdot \frac{p}{2r}, \xi_\mu \cdot \frac{p}{2r}\right)$.

Da $p > (2r)^m$ gibt es x, y mit $0 \leq x < y < p$ und $f(x) = f(y)$.

Setze $\lambda = y - x$. Nun

$$(\lambda b_1, \dots, \lambda b_m) \in \left(-\frac{p}{2r}, +\frac{p}{2r}\right)^m + (p\mathbb{Z})^m .$$

Sei $C \subseteq \left(-\frac{p}{2r}, +\frac{p}{2r}\right) \subseteq \mathbb{Z}$ die Menge, die von der kanonischen Projektion $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf λB abgebildet wird. Wähle $\nu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda\nu \equiv 1 \pmod{p}$. Nun ist $A = C\nu \subseteq \mathbb{Z}$ wie gewünscht.

5. Aufgabe.

Setze $N = 2r|rA - rA| + 1$. Nach Folgerung 5.8 gibt's eine Menge $A_* \subseteq A$ mit $|A_*| \geq \frac{|A|}{r}$, die F_r-isomorph zu einer Menge $B \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ist. Da $|B| \leq |A| < N$ ist $B \neq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. OBdA sei $0 \notin B$ (Translationen sind F_r-Isomorphismen!)

Partitioniere $B = B_1 \dot\cup \dots \dot\cup B_r$ mit

$$B_\rho \subseteq \left\{ x + N\mathbb{Z} : (\rho - 1)\frac{N-1}{r} < x \leq \rho \cdot \frac{N-1}{r} \right\}.$$

Wähle $\rho \in [r]$ mit $|B_\rho| \geq \frac{|B|}{r} = \frac{|A_*|}{r} \geq \frac{|A|}{r^2}$.

Sei $A' = \varphi^{-1}[B_\rho]$, wobei $\varphi : A_* \longrightarrow B$ ein F_r-Isomorphismus ist.

Nun $|A'| = |B_\rho| \geq \frac{|A|}{r^2}$ und A' ist F_r-isomorph zu einer Teilmenge von $\left((\rho-1)\frac{N-1}{r}, \rho \cdot \frac{N-1}{r}\right]$. Folglich ist A' auch zu einer Teilmenge von $\left[\frac{N-1}{r}\right] = \left[2|rA - rA|\right]$ isomorph.