Additive Kombinatorik, 2. Übungsblatt

1. Aufgabe.

Es sei $X \subseteq A$ die größte Menge mit $|X + nB| \le \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^n |X|$.

Angenommen $|X| \le (1-\varepsilon)|A|$. Dann $|(A \setminus X) + B| \le |A+B| \le K|A| \le \frac{K}{\varepsilon}|A \setminus X|$

Nach Lemma von Plünnecke existiert also $\overbrace{\text{eine Menge}}^{\text{nicht-leere}}$ $Y \subseteq A \setminus X$

mit $|Y + nB| \le \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^n |Y|$. Nun ist

$$|(X \cup Y) + nB| \le |X + nB| + |Y + nB|$$

$$\le \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^n (|X| + |Y|) = \left(\frac{K}{\varepsilon}\right) |X \cup Y|.$$

Also widerspricht $X \cup Y$ der Wahl von X.

2. Aufgabe.

(a) Aus der Plünnecke-Ungleichung folgt $|2B| \leq K^2|A|$.

Somit gilt $|X+2B| \leq |X| \cdot |2B| \leq K^2|A||X|$ für alle $X \subseteq A$,

was $f(x) \leq K^2|A|x$ beweist.

(b) Andernfalls sei $x \in [|A|^{1/2}, |A|]$ die kleinste Zahl mit $f(x) > 3K^2|A|^{3/2} - \frac{K^2|A|^2}{x}$.

Wähle $X \subseteq A$ mit $|X| = x$ und

$$|X+2B| > 3K^2|A|^{3/2} - \frac{K^2|A|^2}{x}.$$

Wir wissen $|X+B| \leq |A+B| \leq K|A| = \frac{K|A|}{x} \cdot |X|$.

Aus dem Lemma von Plünnecke erhalten wir eine Menge $Y \subseteq X$

mit $|Y+2B| \leq \left(\frac{K|A|}{x}\right)^2 |Y|$

Setze $|Y| = y$. Nun ist

$$|X+2B| \leq |Y+2B| + |(X \setminus Y)+2B|$$

$$\leq \frac{y}{x^2} \cdot K^2|A|^2 + f(x-y).$$

<u>1. Fall.</u> $x - y \le |A|^{1/2}$.

Wegen Teil (a) folgt

$$|X + 2B| \le \frac{y}{x^2} \cdot K^2 |A|^2 + K^2 |A| (x-y)$$

$$\le \frac{1}{x} \cdot K^2 |A|^2 + K^2 |A|^{3/2}$$

$$\le 2K^2 |A|^{3/2} \le 3K^2 |A|^{3/2} - \frac{K^2 |A|^2}{x}, \quad \underline{\underline{\text{Wid.}}}$$

<u>2. Fall.</u> $x - y > |A|^{1/2}$.

Aus der Minimalität von x folgt

$$|X + 2B| \le \frac{y}{x(x-y)} \cdot K^2 |A|^2 + \left(3K^2 |A|^{3/2} - \frac{K^2 |A|^2}{x-y}\right)$$

$$= 3K^2 |A|^{3/2} - \frac{K^2 |A|^2}{x}. \quad \underline{\underline{\text{Wid.}}}$$

(c) Wegen $|A + 2B| = f(|A|) \le 3 \cdot K^2 |A|^{3/2} = 3 |A|^{-1/2} |A + B|^2$ (zumindest wenn man mit $K = \frac{|A+B|}{|A|}$ startet) ist

$$|A|^{1/2} \, |A + 2B| \le 3 |A + B|^2.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ wende man dies auf die Mengen A^n, B^n an.

Dies liefert

$$|A|^{n/2}\,|A+2B|^n \leq 3\,|A+B|^{2n}$$

und somit

$$|A|^{1/2}\,|A+2B| \leq 3^{1/n}\,|A+B|^2.$$

Da $3^{1/n} \longrightarrow 1$ für $n \longrightarrow \infty$ zeigt dies

$$|A|^{1/2}\,|A+2B| \leq |A+B|^2.$$

3. Aufgabe

Das Lemma von Plünnecke liefert eine Menge $X \subseteq A$ mit $|X + 2A| \leq \sigma[A]^2 |X|$. Es sei M die größte natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass es M Elemente von X gibt, die das gleiche Bild bzgl. φ haben. Dann ist $|X| \leq M |A'|$ klar.

Wir zeigen später

$$|X + 2A| \geq M |A' + A'| \quad \text{. . . . . (*)}$$

Aus (*) folgt $M |A' + A'| \leq \sigma[A]^2 \cdot M |A'|$ und damit $\sigma[A'] \leq \sigma[A]^2$, womit die Aufgabe gelöst ist.

Beweis von (*) Wähle $x_1, \ldots, x_M \in X$ mit $\varphi(x_1) = \ldots = \varphi(x_M)$.

Für $s' \in A' + A'$ wähle $a_1', a_2' \in A'$ mit $s' = a_1' + a_2'$, wähle dann $a_1, a_2 \in A$ mit $\varphi(a_1) = a_1'$, $\varphi(a_2) = a_2'$ und setze dann $s = a_1 + a_2$.

Beachte $\varphi(s) = s'$.

Definiere $\Phi : [M] \times (A' + A') \longrightarrow X + 2A$

durch $(i, s') \longmapsto x_i + s$.

Es genügt zu zeigen, dass Φ injektiv ist.

Betrachte $\Phi(i_1, s_1') = \Phi(i_2, s_2')$, d.h. $x_{i_1} + s_1 = x_{i_2} + s_2$.

Nun $\varphi(x_{i_1}) + \varphi(s_1) = \varphi(x_{i_2}) + \varphi(s_2)$ und da $\varphi(x_{i_1}) = \varphi(x_{i_2})$

folgt $s_1' = s_2'$. Mithin $s_1 = s_2$ und $x_{i_1} = x_{i_2}$, also $i_1 = i_2$.

4. Aufgabe.

(a) Wegen $|A_d| = r_{A-A}(d)$ ist $\sum_{d\in Q} |A_d|^2 \geq \frac{|A|^3}{2K}$.

Es bleibt also $\sum_{d \in Q} |A_d^2 \cap \Omega| \geq \frac{|A|^3}{32K}$ zu zeigen.

Für jedes Paar $(x,y) \in A^2$ hat die Menge $K(x,y) = \{d \in Q : x, y \in A_d\}$ höchstens die Größe $|K(x,y)| \leq r_{A-A}(x-y)$, denn jedem $d \in K(x,y)$ lässt sich seine eigene Darstellung $x-y = (x-d)-(y-d)$ von $x-y$ als Differenz zweier Elemente von A zuordnen. Somit ist

$$\sum_{d\in Q} |A_d^2 \cap \Omega| = \sum_{(x,y)\in\Omega} |K(x,y)| \leq \frac{|A|}{32K} \cdot \Omega \leq \frac{|A|^3}{32K}.$$

(b) Wähle $d_* \in Q$ mit $|A_{d_*}|^2 - 8\,|A_{d_*}^2 \cap \Omega| \geq \frac{|A|^3}{4K|Q|} \geq \frac{|A|^2}{8K^2}$

(c) ~~Setzt~~ Setze $A' = \{a \in A_d :$ Es gibt höchstens $\frac{1}{4}|A_d|$ Paare der Form (a,x) in $\Omega\}$.

Nun ist $\frac{1}{4}|A_d|\cdot|A_d\setminus A'| \leq |A_d^2\cap\Omega| \leq \frac{1}{8}|A_d|^2$,

also $|A_d\setminus A'| \leq \frac{1}{2}|A_d|$, d.h. $|A'| \geq \frac{1}{2}|A_d| \geq \frac{|A|}{6K}$.

(d) Seien $a_1, a_2 \in A'$. Die Anzahl der $x \in A_d$ mit $(a_1, x), (a_2, x) \notin \Omega$ ist mindestens $\frac{1}{2}|A_d|$. Für jedes solche x ist

$a_1 - a_2 = (a_1 - x) - (a_2 - x)$ und es gibt mind. $\left(\frac{|A|}{32K}\right)^2$

Quadrupel $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in A^4$ mit $a_1 - x = b_1 - b_2$, $a_2 - x = b_3 - b_4$.

Also $r_{2A-2A}(a_1-a_2) \geq \frac{1}{2}|A_d|\cdot\left(\frac{|A|}{32K}\right)^2 \geq \frac{|A|^3}{2^3 \cancel{K}\cdot(2^5K)^2}$

$$= 2^{-13}K^{-3}|A|^3.$$

Somit

$$|A'-A'| \leq \frac{|A|^4}{2^{-13}K^{-3}|A|^3} = 2^{13}K^3|A| \leq 2^{16}K^4|A'|.$$

5. Aufgabe.

Für

$$A = \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 21, 24, 25, 26, 28, 29\}$$

ist $|A| = 17$, $|A - A| = 55$ und $|A + A| = 59$. (Ruzsa)

Beispiele von Niclas Confurius.

- Für die additive Menge $A = \{[0], [1], [4], [8], [9], [11]\}$ in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ gilt $|A| = 6$, $|A - A| = 11$ (beachte $[6] \notin A - A$) und $|A + A| = 12$.
- Für $A = \{[0], [1], [2], [7], [9], [11]\}$ in $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ gilt $|A| = 6$, $|A - A| = 13$ (beachte $\pm[3] \notin A - A$) und $|A + A| = 14$ (da $A + A = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \setminus \{[6]\}$).