Additive Kombinatorik – Übungsblatt 7

Wintersemester 2020/21

Christian Reiher

1. Man beweise, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von 53 vierten Potenzen darstellen lässt. Dazu benutze man den 4-Quadrate-Satz von Lagrange und die Formel

$$6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a + b)^4 + (a - b)^4 + (a + c)^4 + (a - c)^4 + (a + d)^4 + (a - d)^4 \\ + (b + c)^4 + (b - c)^4 + (b + d)^4 + (b - d)^4 + (c + d)^4 + (c - d)^4.$$

2. Es seien $A, B \subseteq \mathbb{F}_p$ zwei additive Mengen mit $|A| \neq |B|$. Man beweise, dass

$$|A \dot{+} B| \geq \min\{|A| + |B| - 2, p\},$$

wobei $A \dot{+} B = \{a + b : a \in A, b \in B \text{ und } a \neq b\}$.

3. Es sei n eine positive ganze Zahl. Man bestimme die kleinste ganze Zahl m , für die es Ebenen $E_1, \dots, E_m \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt, die den Ursprung nicht enthalten und alle Punkte der Menge $\{0, 1, \dots, n\}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ überdecken.
4. Man seien n eine positive ganze Zahl und $E_1, \dots, E_m \subseteq \mathbb{R}^n$ Hyperebenen, die den Ursprung nicht enthalten, aber alle anderen Punkte des Würfels $\{0, 1\}^n$ überdecken. Man beweise, dass $m \geq n$.
5. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph, dessen Durchschnittsgrad größer als 4 ist und dessen Maximalgrad höchstens 5 beträgt. Man beweise, dass G einen 3-regulären Teilgraphen besitzt.

Diskussion am Dienstag, den 16. Februar

Hinweise

1. $53 = 4 \times 12 + 5$.
3. Eine Ebene ist die Nullstellenmenge eines Polynoms vom Grad 1.
5. Man ordne jeder Kante $e \in E$ eine Variable x_e zu, die den Wert 1 oder 0 annehmen kann, jenachdem ob e in dem 3-regulären Teilgraphen liegt oder nicht und benutze, dass 3 eine Primzahl ist.