Additive Kombinatorik – Übungsblatt 6

Wintersemester 2020/21

Christian Reiher

1. Es seien P eine GAP vom Rang d und m, n positive ganze Zahlen. Man beweise, dass $|mP - nP| \leq (m+n)^d |P|$.
2. Es sei $X \subseteq \mathbb{Z}$ eine Menge der Mächtigkeit $k \geq 2$.
 - (a) Man zeige, dass eine GAP $P \supseteq X$ mit $|P| \leq 2^{k-1}$ existiert.
 - (b) Man zeige, dass keine GAP $P \supseteq X$ mit $|P| < 2^{k-1}$ existieren muss.
3. Man versuche, eine möglichst kleine reelle Zahl M mit der folgenden Eigenschaft zu finden: Für jede GAP $P \subseteq \mathbb{Z}$ vom Rang 2, die nicht echt ist, existiert eine arithmetische Folge $Q \supseteq P$ mit $|Q| \leq M|P|$. Stimmt das für $M = 2$? Gibt es sogar eine Zahl $M < 2$, für die das richtig ist?
4. Es seien A, S zwei additive Mengen (in der gleichen umgebenden Gruppe) mit $|A| > 4|S|$. Man zeige, dass ein $a \in A$ mit $|S \cup (S + a)| \geq \frac{3}{2}|S|$ existiert.
5. Es sei A eine additive Menge (mit beliebiger umgebender Gruppe). Man zeige, dass eine natürliche Zahl $d \leq 3 \log |A|$ und $a_1, \dots, a_d \in A$ existieren, für die der „Würfel“

$$\{k_1 a_1 + \dots + k_d a_d : 0 \leq k_1, \dots, k_d < 2\}$$

mindestens die Mächtigkeit $|A|/4$ hat.

Diskussion am Dienstag, den 2. Februar

Hinweise

3. Hier braucht man etwas elementare Zahlentheorie.
4. Man betrachte die Energie von S .
5. Man wähle $a_1, \dots, a_d$ rekursiv. In jedem Schritt verwende man das Resultat von Aufgabe 5.