Additive Kombinatorik – Übungsblatt 5

Wintersemester 2020/21

Christian Reiher

---

1. Es seien A, B zwei additive Mengen in der gleichen umgebenden Gruppe G . Man beweise, dass

$$E(A, B) = \frac{1}{|G|} \sum_{r \in \hat{G}} |\hat{A}(r)|^2 |\hat{B}(r)|^2.$$

Erinnerung. Die linke Seite ist als die Anzahl der Quadrupel $(a, a', b, b') \in A^2 \times B^2$ mit $a + b = a' + b'$ definiert.

2. Es seien G eine endliche abelsche Gruppe und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ nicht die Nullfunktion. Man beweise die *Unschärferelation*

$$|\text{supp}(f)| \cdot |\text{supp}(\hat{f})| \geq |G|.$$

Dabei steht $\text{supp}(f)$ für den Träger von f , d.h. die Menge $\{x \in G: f(x) \neq 0\}$.

3. Es seien n, f zwei natürliche Zahlen mit $n \mid (f^2 + 1)$. Man wende Minkowskis ersten Satz auf das von $(0, p)$, $(1, f)$ erzeugte Gitter und die Menge $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x|, |y| < \sqrt{n}\}$ an, um zu beweisen, dass zwei ganze Zahlen a und b mit $n = a^2 + b^2$ existieren.
4. Die natürliche Zahl n teile $1 + f^2 + g^2$, wobei $f, g \in \mathbb{Z}$. Indem man Minkowskis ersten Satz auf das von $(1, 0, f, g)$, $(0, 1, g, -f)$, $(0, 0, n, 0)$ und $(0, 0, 0, n)$ erzeugte vierdimensionale Gitter anwende, beweise man, dass vier ganze Zahlen a, b, c und d mit $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ existieren.
5. Es sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^5$ das von $\mathbb{Z}^5$ und $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1)$ erzeugte Gitter. Gibt es eine nichtleere, beschränkte, offene, konvexe und symmetrische Menge $B \subseteq \mathbb{R}^5$, die die gleichen sukzessiven Minima bezüglich $\mathbb{Z}^5$ und Γ hat?
6. Es sei P ein punktsymmetrisches konvexes Polygon in der Ebene. Man beweise, dass ein P enthaltendes Parallelogramm R existiert, das höchstens den $\sqrt{2}$ -fachen Flächeninhalt von P besitzt.

Diskussion am Dienstag, den 19. Januar

Hinweise

2. Aus der Dreiecksungleichung folgt $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, d.h. $\max\{|\hat{f}(r)|: r \in \hat{G}\} \leq \sum_{x \in G} |f(x)|$.
Dies verbinde man mit der Formel von Parseval.
4. Die vierdimensionale Einheitskugel hat das Volumen $\pi^2/2$.
6. Warum stimmt das für 2 statt $\sqrt{2}$?