Additive Kombinatorik – Übungsblatt 4

Wintersemester 2020/21

Christian Reiher

1. Es seien G und H zwei endliche abelsche Gruppen. Man beweise, dass $\widehat{G \times H} \cong \widehat{G} \times \widehat{H}$.
2. Es seien G eine endliche abelsche Gruppe und $\varphi: G \rightarrow S^1$ ein F_2 -Homomorphismus. Man beweise, dass eine komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ und eine Frequenz $r \in \widehat{G}$ derart existieren, dass $\varphi(x) = \alpha r(x)$ für alle $x \in G$ gilt.
3. Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Für jede Untergruppe $H \subseteq G$ setzen wir

$$H^\perp = \{r \in \widehat{G} : \text{Für alle } h \in H \text{ ist } r(h) = 1\}.$$

Man zeige, dass $H^\perp$ eine Untergruppe von $\widehat{G}$ ist, für die $|H| \cdot |H^\perp| = |G|$ gilt. Müssen $H^\perp$ und G/H isomorph sein?

4. In der Situation der vorigen Aufgabe beweise man für jede Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ die Gleichung

$$\sum_{h \in H} f(h) = |H^\perp|^{-1} \sum_{r \in H^\perp} \widehat{f}(r).$$

5. Es seien $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper, $A \subseteq \mathbb{F}$ eine additive Menge mit $0 \notin A$ und die Funktion $f: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{C}$ sei durch

$$f(x) = |\{(a_1, a_2) \in A^2 : a_1 a_2 = x\}|$$

für alle $x \in \mathbb{F}$ definiert.

- (a) Man zeige $\widehat{f}(0) = |A|^2$ und $|\widehat{f}(r)| \leq \sum_{a \in A} |\widehat{A}(ar)| \leq |A| |\mathbb{F}|^{1/2}$ für alle $r \in \widehat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}$.
- (b) Man zeige $\sum_{r \in \widehat{\mathbb{F}}} |\widehat{f}(r)|^2 \leq |A|^3 |\mathbb{F}|$.
- (c) Man zeige

$$(f * f * f)(x) \geq |\mathbb{F}|^{-1} \left(|\widehat{f}(0)|^3 - \sum_{r \in \widehat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}} |\widehat{f}(r)|^3 \right) > |A|^4 |\mathbb{F}|^{-1} (|A|^2 - |\mathbb{F}|^{3/2})$$

für alle $x \in \mathbb{F}$.

- (d) Ab jetzt nehmen wir zusätzlich $|A| > |\mathbb{F}|^{3/4}$ an. Man beweise, dass für jedes $x \in \mathbb{F}$ die Gleichung $x = a_1 a_2 + a_3 a_4 + a_5 a_6$ eine Lösung mit $a_1, \dots, a_6 \in A$ besitzt.

Diskussion am Dienstag, den 5. Januar