Additive Kombinatorik – Übungsblatt 3
Wintersemester 2020/21
Christian Reiher

---

1. Es sei A eine additive Menge in einer t-Torsionsgruppe G und es gelte $|A + A| \leqslant K|A|$. Man beweise, dass eine Untergruppe H von G und ein Element $x \in G$ mit $A \subseteq H + x$ und $|H| \leqslant K^2 t^{K^4}|A|$ gibt.

2. Es sei $r \geqslant 2$ beliebig. Man finde zwei additive Mengen $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, die zwar F_r-isomorph aber nicht F_{r+1}-isomorph sind.

3. Die additiven Mengen A und B (mit eventuell verschiedenen umgebenden Gruppen) seien F_2-isomorph. Man zeige $\delta[A] = \delta[B]$, $\sigma[A] = \sigma[B]$ und $E(A) = E(B)$.

4. Es seien p eine Primzahl, $r \geqslant 2$ und $B \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eine additive Menge mit $(2r)^{|B|} \leqslant p$. Man zeige, dass eine additive Menge $A \subseteq \mathbb{Z}$ gibt, für die die Einschränkung der kanonischen Projektion $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf A ein F_r-Isomorphismus zwischen A und B ist.

5. Es seien $A \subseteq \mathbb{Z}$ eine additive Menge und $r \geqslant 2$. Man beweise, dass es eine Teilmenge $A' \subseteq A$ mit $|A'| \geqslant |A|/r^2$ gibt, die F_r-isomorph zu einer Teilmenge von $[2|rA - rA|]$ ist.

6. (Zum Selbststudium). Studieren Sie einen Beweis des Bertrand'schen Postulats: Für jede natürliche Zahl n existiert eine Primzahl p mit $n \leqslant p \leqslant 2n$. Mögliche Quellen:

   - http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram24.pdf
   - Kapitel 2 im „Buch der Beweise“ von Aigner und Ziegler

Diskussion am Dienstag, den 15. Dezember

Hinweise

1. Im Beweis von Lemma 4.6 der Vorlesung kann man sich etwas schlauer anstellen.
2. Gibt es dreielementige Mengen mit dieser Eigenschaft?
3. Man denke an Lemma 5.5.
4. Man finde $\lambda \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ mit der Eigenschaft, dass λB Repräsentanten in $[-p/(2r), p/(2r)]$ hat.
5. Man benutze Folgerung 5.9 und ein Argument aus dem Beweis von Proposition 5.8