Additive Kombinatorik – Übungsblatt 2
Wintersemester 2020/21

Christian Reiher

1. Es seien $K \geqslant 1$ und $\varepsilon \in (0, 1]$ reelle Zahlen sowie $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien A, B zwei additive Mengen mit $|A + B| \leqslant K|A|$. Man beweise, dass eine Menge $X \subseteq A$ mit $|X| > (1 - \varepsilon)|A|$ und $|X + nB| \geqslant (K/\varepsilon)^n |X|$ existiert.

2. Es seien A und B zwei additive Mengen mit $|A + B| \leqslant K|A|$.
   (a) Setze $f(x) = \max\{|X + 2B| \colon X \subseteq A \text{ und } |X| = x\}$ für jede natürliche Zahl $x \leqslant |A|$. Man beweise $f(x) \leqslant K^2|A|x$ für alle $x \leqslant |A|$.
   (b) Man beweise, dass
   $$f(x) \leqslant 3K^2|A|^{3/2} - \frac{K^2|A|^2}{x}$$
   für alle natürlichen Zahlen x mit $|A|^{1/2} \leqslant x \leqslant |A|$ gilt.
   (c) Man folgere $|A|^{1/2}|A + 2B| \leqslant 3|A + B|^2$ und verbessere dieses Resultat zu
   $$|A|^{1/2}|A + 2B| \leqslant |A + B|^2 .$$

3. Es seien $\varphi \colon G \longrightarrow G'$ ein Homomorphismus zwischen abelschen Gruppen, $A \subseteq G$ eine additive Menge und $A' = \varphi[A]$ ihr Bild.
   Man beweise $\sigma[A'] \leqslant \sigma[A]^2$.

4. Es sei A eine additive Menge mit $E(A) \geqslant |A|^3/K$. Wie in der Vorlesung zeigt man, dass die Menge
   $$Q = \{d \in A - A \colon r_{A-A}(d) \geqslant |A|/(2K)\}$$
   die Größe $|Q| \leqslant 2K|A|$ hat und
   $$\sum_{d \in Q} r_{A-A}(d)^2 \geqslant \frac{|A|^3}{2K}$$
   erfüllt. Betrachte die unangenehme Menge
   $$\Omega = \{(a, a') \in A^2 \colon r_{A-A}(a - a') \leqslant |A|/(32K)\} .$$
   Setze $A_d = A \cap (A + d)$ für alle $d \in Q$.
   (a) Man zeige die Abschätzung
   $$\sum_{d \in Q} \left(|A_d|^2 - 8|A_d^2 \cap \Omega|\right) \geqslant \frac{|A|^3}{4K} .$$
   (b) Man folgere die Existenz eines Elementes $d \in Q$ mit $|A_d| \geqslant |A|/(3K)$ und $8|A_d^2 \cap \Omega| \leqslant |A_d|^2$.
   (c) Man zeige die Existenz einer Menge $A' \subseteq A_d$ mit $|A'| \geqslant |A|/(6K)$ und der folgenden Eigenschaft: Für jedes $a \in A'$ gibt es mindestens $(3/4)|A_d|$ Elemente $x \in A_d$ mit $(a, x) \notin \Omega$.
   (d) Zeige $r_{A+A-A-A}(a_1 - a_2) \geqslant 2^{-13}K^{-3}|A|^3$ für alle $a_1, a_2 \in A'$ und folgere
   $$|A' - A'| \leqslant 2^{13}K^3|A| \leqslant 2^{16}K^4|A'| .$$

5. (Optional, nur wenn Sie Spaß daran haben, erfordert wahrscheinlich Computereinsatz). Man finde eine additive Menge $A \subseteq \mathbb{Z}$ mit $|A - A| < |A + A|$. Gibt es einfachere Beispiele solcher Mengen in anderen Gruppen?

Diskussion am Dienstag, den 1. Dezember

Hinweise

1. Man versuche, das Lemma von Plünnecke (wie in der Wiederholung vor der dritten Vorlesung formuliert) iterativ anzuwenden, um Schrittweise größere geeignete Mengen $X \subseteq A$ zu finden.
2. Warum stimm Teilaufgabe (a) für $x = 1$? Bei Teilaufgabe (b) betrachte man ein kleinstes Gegenbeispiel und wende die Plünnecke Ungleichung an. Um in (c) den Faktor 3 wegzuschaffen, wende man das Resultat mit der 3 in der umgebenden Gruppe G^n an, wobei G die umgebende Gruppe von A und B bezeichnet. Was passiert für $n \to \infty$?
3. Man organisiere sich $X \subseteq A$ und $M \in \mathbb{N}$ mit $|X + 2A| \leqslant \sigma[A]^2|X|$, $|X| \leqslant M|A'|$, und $|X + 2A| \geqslant M|A' + A'|$.
4. Bei Teilaufgabe (a) zeigt man separat, dass die Summe der $|A_d|^2$ großund die Summe der $8|A_d^2 \cap \Omega|$ klein ist. Bei Teilaufgabe (c) muss man „säubern“.
5. Ruzsa gab eine Menge $A \subseteq \{0, 1, \ldots, 29\}$ mit $|A| = 17$, $|A - A| = 55$ und $|A + A| = 59$ an.