Additive Kombinatorik – Übungsblatt 1
Wintersemester 2020/21
Christian Reiher

Aufgabe 4 benutzt den Stoff der Vorlesung vom 12. November.

1. Es sei d eine positive ganze Zahl. Man konstruiere eine additive Menge A mit umgebender Gruppe $\mathbb{Z}$, für die $|A + A| = 6^d$ und $|A - A| = 7^d$ gilt.

2. Es sei A eine additive Menge mit umgebender Gruppe G. Man beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (*i*) $\sigma[A] = 1$

   (*ii*) $\delta[A] = 1$

   (*iii*) $|5A - 7A| = |A|$

   (*iv*) Es gibt eine endliche Untergruppe H von G und ein Element $x \in G$ mit $A = H + x$.

3. Es sei A eine additive Menge mit umgebender Gruppe $\mathbb{R}^2$, für die $|A + A| \leqslant 3|A| - 4$ gilt. Man beweise, dass es eine Gerade gibt, auf der alle Punkte aus A liegen.

4. Man beweise, dass für jede additive Menge A die Ungleichungen

$$|A + A| \leqslant |A - A|^{3/2} \quad \text{und} \quad |A - A| \leqslant |A + A|^{3/2}$$

   gelten.

Diskussion am Dienstag, den 17. November

Hinweise

1. Es ist leichter, eine solche Menge mit umgebender Gruppe $\mathbb{Z}^d$ zu konstruieren. Versuchen Sie, eine solche Menge "nach $\mathbb{Z}$ zu projizieren".

2. Bei der schweren Richtung kann man die Dreiecksungleichung von Ruzsa anwenden.

3. Es hilft, sich klarzumachen, warum $|A + A| \geqslant 2|A| - 1$ für alle additiven Mengen mit umgebender Gruppe $\mathbb{R}$ gilt.

4. Bringen Sie $E(A, A)$, $r_{A+A}(\cdot)$ und $r_{A-A}(\cdot)$ ins Spiel.