Wiederholung zur 5. Vorlesung.

Dfn. Eine Abbildung $\varphi: A \to B$ ist ein **F_r-Homomorphismus**, wenn für alle $a_1, \ldots, a_r, a_1', \ldots, a_r' \in A$ mit $\sum_i a_i = \sum_i a_i'$ auch $\sum_i \varphi(a_i) = \sum_i \varphi(a_i')$ gilt.

Lemma. Wenn A, B zwei $F_{(m+n)r}$-isomorphe additive Mengen sind, dann sind $mA - nA$ und $mB - nB$ immerhin noch F_r-isomorph.

Proposition (Ruzsa) Es sei $r \geq 2$ und $A \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sei eine additive Menge, wobei p eine Primzahl sei. Für jede natürliche Zahl N mit

$$2r\,|rA - rA| < N < p$$

existiert eine Menge $A' \subseteq A$ mit $|A'| \geq \frac{|A|}{r}$, die F_r-isomorph zu einer Teilmenge von $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ist.

Folgerung 5.8. Es seien $A \subseteq \mathbb{Z}$ eine additive Menge, $r \geq 2$ und N eine natürliche Zahl mit $N > 2r|rA - rA|$. Dann existiert eine Menge $A' \subseteq A$ mit $|A'| \geq \frac{|A|}{r}$, die F_r-isomorph zu einer Teilmenge von $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ist.

Beweis. Wähle Primzahl p mit

$$p > N \quad \text{und} \quad p > r \cdot \max\{|a| : a \in A\}.$$

Die kanonische Projektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bildet A auf eine F_r-isomorphe Menge ab. Wende Prop 5.7 an. $\square$

Folgerung 5.9. Für jede additive Menge $A \subseteq \mathbb{Z}$ existieren eine Primzahl $N < 32|8A - 8A|$ und Mengen $A' \subseteq A$, $B \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ mit $|A'| = |B| \geq \frac{|A|}{8}$, für die $2A' - 2A'$ und $2B - 2B$ zwei F_2-isomorphe Mengen sind.

Beweis. Wende das Bertrand'sche Postulat liefert eine Primzahl N mit $16|8A - 8A| < N < 32|8A - 8A|$. Wende Folgerung 5.8

auf A, $r = 8$, N an. Dies liefert eine Menge $A' \subseteq A$ mit $|A'| \geq \frac{|A|}{8}$, die F_8-isomorph zu einer Menge $B \subseteq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ist.

Nach Lemma 5.6 sind $2A' - 2A'$, $2B - 2B$ F_2-isomorph. $\square$

§6. Fourier Analyse.

Dfn 6.1. Es sei G eine endl. abelsche Gruppe. Die Gruppe aller Homomorphismen von G nach $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ heißt Pontryagin Dual $\widehat{G}$ von G.

Bem. 6.2. (1) Die Verknüpfung in $\widehat{G}$ ist punktweise Multiplikation.

(2) Ist $\varphi : G \to \mathbb{C}^\times$ ein Homomorphismus, so gilt $\varphi(x)^{|G|} = \varphi(|G|x)$ $= \varphi(0) = 1$. Also ist $\varphi(x)$ eine $|G|$te Einheitswurzel.

Insbesondere $\varphi \in \widehat{G}$ und $\widehat{G}$ ist endlich.

Lemma 6.3. Es seien $N \in \mathbb{N}$, $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ und $\omega = e^{2\pi i/N}$.

Für $x \in G$ sei $\varphi_x : G \to S^1$ durch $\varphi_x(y) = \omega^{xy}$ definiert.

Dann ist $\widehat{G} = \{\varphi_x : x \in G\} \cong G$.

Beweis. Wegen $\varphi_x(y) \cdot \varphi_x(y') = \omega^{xy} \cdot \omega^{xy'} = \omega^{x(y+y')} = \varphi_x(y+y')$ ist $\varphi_x \in \widehat{G}$. Sei umgekehrt $\varphi \in \widehat{G}$. Wähle $x \in G$ mit $\varphi(1) = \omega^x = \varphi_x(1)$.

Da G von 1 erzeugt wird, folgt $\varphi = \varphi_x$. Schließlich zeigt

$$\varphi_x(y) \cdot \varphi_{x'}(y) = \omega^{xy} \cdot \omega^{x'y} = \omega^{(x+x')y} = \varphi_{x+x'}(y),$$

dass $\varphi_x \cdot \varphi_{x'} = \varphi_{x+x'}$. Also ist $x \mapsto \varphi_x$ ein Homomorphismus von G nach $\widehat{G}$ ist. $\square$

Lemma 6.4. Für je zwei endl. abelsche Gruppen G, H ist $\widehat{G \times H} \cong \widehat{G} \times \widehat{H}$.

Beweis. (Übung!) $\square$

Folgerung 6.5. Jede endl. abelsche Gruppe ist zu ihrem Pontryagin Dual isomorph.

Beweis. Jede endl. ab. Gruppe G kann man mit geeigneten nat. Zahlen $n_1, \ldots, n_r$ in der Form $G \cong \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ schreiben.

Nun $\widehat{G} \cong \prod_{i=1}^{r} \widehat{\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}}$ (Lemma 6.4)

Lemma 6.3 $\cong \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \cong G$. $\square$

Bem 6.6. (1) Der Beweis zeigt: Für alle $x \in G \setminus \{0\}$ existiert $r \in \hat{G}$ mit $r(x) \neq 1$.

(2) Es gibt keinen kanonischen Isomorphismus von G nach $\hat{G}$.
Allerdings sind G und $\hat{\hat{G}}$ kanonisch isomorph.
Dabei wird $x \in G$ auf das Element $r \mapsto r(x)$ von $\hat{\hat{G}}$ abgebildet.

(3) Die Abb. $\hat{G} \times G \to S^1$ $(r, x) \to r(x)$ ist eine Paarung von $\hat{G}$ und G (bilinear!).

Lemma 6.7. (Orthogonalitätsrelationen)

Für alle $r \in \hat{G}$ ist

$$\sum_{x \in G}{}' \, r(x) = \begin{cases} |G| & \text{wenn } r \text{ das neutrale Element ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $x \in G$ ist

$$\sum_{r \in \widehat{G}} r(x) = \begin{cases} |G| & \text{wenn } x = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Die jeweils oberen Aussagen sind klar. Sei nun $r \in \widehat{G}$ nicht das neutrale Element. Wähle $z \in G$ mit $r(z) \neq 1$. Nun

$$(1 - r(z)) \sum_{x \in G} r(x) = \sum_{x \in G} r(x) - \sum_{x \in G} r(x+z) = 0,$$

da $x \mapsto x + z$ die Elemente von G permutiert, also $\sum_{x \in G} r(x) = 0$.

Sei nun $x \in G \setminus \{0\}$. Wähle $s \in \widehat{G}$ mit $s(x) \neq 1$ (nach Bem. 6.6(1)).

Nun

$$(1 - s(x)) \sum_{r \in \widehat{G}} r(x) = \sum_{r \in \widehat{G}} r(x) - \sum_{r \in \widehat{G}} (rs)(x) = 0,$$

da $r \mapsto r \cdot s$ die Elemente von $\widehat{G}$ permutiert, also $\sum_{r \in \widehat{G}} r(x) = 0$. $\square$

Dfn 6.8. Ist G eine endliche abelsche Gruppe und $f: G \to \mathbb{C}$ eine Funktion, so heißt $\hat{f}: \hat{G} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\hat{f}(r) = \sum_{x \in G} f(x)\, \overline{r(x)}$$

die Fouriertransformierte von f.

Lemma 6.9. **(Inversionsformel)** In dieser Situation gilt

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{r \in \hat{G}} \hat{f}(r)\, r(x) \text{ für alle } x \in G.$$

Beweis.
$$\sum_{r \in \hat{G}} \hat{f}(r)\, r(x) = \sum_{r \in \hat{G}} \Big(\sum_{y \in G} f(y)\, \overline{r(y)} \Big) r(x)$$

$$= \sum_{y \in G} f(y) \underbrace{\Big(\sum_{r \in \hat{G}} r(x-y) \Big)}_{=0,\ \text{außer wenn } x-y=0} = |G| f(x). \qquad \square$$